Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

3.1. MC Fragen: Supremum und Infimum auf $\mathbb{R}$. Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Der Wert von $\limsup \frac{(-1)^n}{n}$ ist

○ -1 ○ 0 ○ 1

(b) Sei (a_n) eine reelle Folge so, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ Die Folge (a_n) ist konvergent, falls (a_n) monotone ist.

○ $\liminf a_n < \limsup a_n$, falls (a_n) beschränkt ist.

○ Die Folge (a_n) ist konvergent, falls (a_n) streng monoton wachsend ist.

○ $\liminf a_n \geq 0$, falls (a_n) beschränkt ist.

(c) Seien (a_n) und (b_n) zwei reellen Folgen. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

○ Die Folge (b_n) ist konvergent, falls $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (a_n) konvergent ist.

○ Beiden Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent, falls $|a_n - b_n| < 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

○ Die Folge (b_n) ist konvergent, falls (b_n^2) konvergent ist.

○ Die Folge (b_n) konvergiert gegen 0, falls $0 \leq b_n \leq a_n^3$ und (a_n) konvergent gegen 0 ist.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist äquivalent zu $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$?

○ $\forall n \geq 1,\ \exists k \geq n,\ |a_n - 2| < \frac{1}{n}$.

○ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k \geq 1,\ a_n \leq 2 + \varepsilon$.

○ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ |a_n - 2| < \varepsilon$.

○ $\exists \varepsilon > 0,\ \exists N \geq 1,\ \forall n \geq N,\ |a_n - 2| \leq \varepsilon$.

3.2. $\star$ **Grenzwert I** Sei $a \in \mathbb{Z}$, und sei (a_n) definiert durch

$$a_n = \frac{n^a}{n!}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen sie, dass es $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \geq N_0$.

(b) Folgern, dass (a_n) konvergent ist.

(c) Beweisen Sie, dass (a_n) gegen 0 konvergiert.

3.3. ⋆ Limes superior und inferior

(a) Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $-X$ die Menge

$$-X := \{-x : x \in X\},$$

(z.B. $-[1, 2] = [-2, -1]$). Zeigen Sie, dass $-X$ nicht leer und nach unten beschränkt ist, wenn X nicht leer und nach oben beschränkt ist. Beweisen Sie, dass folgendes gilt:

$$\inf(-X) = -\sup(X).$$

(b) Seien (a_n) eine reelle und beschränkte Folge, und t eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$\limsup(ta_n) = \begin{cases} t \limsup(a_n), & \text{wenn } t > 0, \\ 0, & \text{wenn } t = 0, \\ t \liminf(a_n), & \text{wenn } t < 0. \end{cases}$$

3.4. Grenzwert II Man untersuche die nachstehenden Zahlenfolgen. Konvergieren sie? Wenn ja: Welches ist ihr Grenzwert?

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 + n^2 - 1}{5(n^3)! + 2},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n^2 + 12}{1000n + \sqrt{n}},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 + 2}{(-1)^n n^4 + 7},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n!}{(n!)^2 + 1}.$$