Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

4.1. MC Fragen: Konvergenzkriterium. Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche der folgenden Aussagen $a_n \to +\infty$ impliziert?

- ◯ Es gibt $N \geq 0$, sodass $a_n \geq 12n$ für alle $n \geq N$.
- ◯ $a_n = 1/b_n$, und $b_n \to 0$.
- ◯ Für jedes $N \geq 1$ existiert $n \geq N$, sodass $a_n > 2^n$.
- ◯ $a_{n+1} - a_n$ ist unbeschränkt.

(b) Seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Folgen, und $c_n = a_n + b_n$. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Wenn (c_n) konvergent ist, dann sind (a_n) und (b_n) konvergenten, und gilt es
$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} c_n.$$
- ◯ Wenn (b_n) und (c_n) konvergenten sind, dann konvergiert (a_n), und gilt es
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$
- ◯ Mindestens eine der beiden Folgen (a_n) und (b_n) konvergent ist, wenn (c_n) konvergent ist.
- ◯ Die Folge (a_n) ist beschränkt, wenn (c_n) beschränkt ist.

(c) Sei (a_n) eine reelle Folge. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Folge (a_n) ist konvergent, wenn $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ existieren, sodass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- ◯ Die Folge $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ ist konvergent, wenn (a_n) konvergent ist.
- ◯ Die Folge (a_n) ist konvergent, wenn die Ungleicheiten $a_n \geq 0$ und $a_{n+1} \geq a_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten.

4.2. $\star$ **Rekursive Folge** Sei $c > 1$. Die reelle Folge (a_n) sei rekursive gegeben durch

$$\begin{cases} a_1 = c, \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{c}{a_n^2}\right), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. Insbesondere ist die Folge (a_n) wohldefiniert.

(b) Zeigen Sie, dass $a_n^3 > c$ für jedes $n \geq 2$.

(c) Ableiten Sie, dass (a_n) konvergent ist.

(d) Sei ℓ der Grenzwert der Folge (a_n). Zeigen Sie, dass $\ell \geq 1$ und $\ell^3 = c$.

4.3. Komplexe Folgen I Seien (a_n) eine beschränkte komplexe Folge und (b_n) eine reelle Folge, sodass $b_n \to +\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

gilt. Hier liegt die Grenze bei den komplexen Zahlen.

4.4. Komplexe Folgen II Sei $q \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl so, dass $|q| < 1$. Die komplexe Folge (a_n) ist durch

$$a_n = 1 + 2q + 3q^2 + \cdots + nq^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$(1-q)^2 a_n = nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1.$$

(b) Ableiten Sie, dass (a_n) konvergent ist. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

4.5. $\star$ **Komplexe Folgen III** Sei (a_n) eine komplexe Folge, sodass

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (a_n) eine Cauchy Folge ist. Folgern, dass (a_n) konvergent ist.