Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

5.1. MC Fragen: Konvergente Reihen. Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ eine konvergente Reihe. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

- ○ Die Folge $(x_{n+1} - x_n)$ konvergiert gegen 0.
- ○ Die Reihe ist genau dann absolut konvergent, falls

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq n \geq N, |x_m - x_n| < \varepsilon.$$

- ○ Es gibt $C \geq 0$, sodass

$$|x_n + \cdots + x_{2n}| \leq C, \quad \forall n \geq 0.$$

(b) Sei (x_n) eine reelle Folge, sodass $x_n \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n \geq 1$.

- ○ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ist konvergent, aber nicht unbedingt absolut konvergent.
- ○ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ist absolut konvergent.
- ○ Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ ist absolut konvergent, falls $|y_n| \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

(c) Seien (x_n) eine komplexe Folge und $C \geq 0$, sodass $2^n |x_n| \leq C$ für alle $n \geq 10$.

- ○ Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ ist höchstens 2.
- ○ Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ist konvergent, aber nicht unbedingt absolut konvergent.
- ○ Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n x_n$ ist absolut konvergent.

5.2. Konvergenzkriterium Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^{n+1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n^5+3n^4+3n^3+2n^2+1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

5.3. $\star$ Komplexe Reihe Sei (x_n) eine komplexe Folge, sodass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ konvergent ist.

(a) Zeigen Sie, dass $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|x_n^2| \leq |x_n|$ für alle $n \geq N_0$ ist.

(b) Folgern, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ absolut konvergent ist, falls $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist.

(c) Zeigen Sie, dass, wenn $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ nicht absolut konvergent ist, es sein kann, dass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ divergiert.

5.4. Konvergenzradius Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

gleich 4 ist. *(Hinweis: Benutzen Sie das Quotientenkriterium.)*

5.5. $\star$ **Wurzelkriterium** Für jede reelle Zahl $x \geq 0$ und ganze Zahl $n \geq 1$ existiert eine einzige Zahl y, sodass $y^n = x$ ist. Wir bezeichnen $y = \sqrt[n]{x}$.

Sei (x_n) eine komplexe Folge, sodass die Folge $\left(\sqrt[n]{|x_n|}\right)$ gegen $\ell \in \mathbb{R}$ konvergent ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ absolut konvergent ist, falls $\ell < 1$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ divergent ist, falls $\ell > 1$ ist.