Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

6.1. MC Fragen: Doppelte Summation und stetige Funktionen Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Sei $(a_{n,m})$ eine reelle Doppelfolge. Welche der folgenden Bedingungen impliziert, dass die folgende Gleichung gilt:

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,m}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{n,m}\Big).$$

- ◯ Keine Bedingung erforderlich ist. Diese Gleichign ist immer wahr.
- ◯ Wenn eine Kostante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|a_{n,m}| \leq C$ für alle n und m.
- ◯ Wenn eine Kostante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\sum_{m=0}^{M}\Big(\sum_{n=0}^{N} a_{n,m}\Big) \leq C,$$

für alle M und N.

- ◯ Wenn eine Kostante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$\sum_{m=0}^{M}\Big(\sum_{n=0}^{N} |a_{n,m}|\Big) \leq C,$$

für alle M und N.

(b) Welche der folgenden Bedingungen impliziert *nicht*, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist:

- ◯ Es gibt $C \geq 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- ◯ Es gibt $C \geq 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \geq 1$.
- ◯ Es gibt $C \geq 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq 1$.

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Eigenschaften ist zutreffend:

- ◯ Es gibt $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x_0) = 0$ ist.
- ◯ Wenn (x_n) eine reelle Folge ist, sodass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = 2$, dann $f(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)$.
- ◯ Es gilt

$$f(0) = \lim_{n\to+\infty} f\Big(\frac{(-1)^n}{n}\Big).$$

(d) Welche der folgenden Aussagen ist richtig.

- ◯ Jede monotone Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist stetig.
- ◯ Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist monoton.
- ◯ Jede stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ ist surjektiv, wenn $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

6.2. $\star$ **Stetigkeit I** Finden Sie die Werten $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b, & \text{wenn } x \leq -1, \\ (a+b)x, & \text{wenn } -1 < x < 1, \\ x^2 + ax - b, & \text{wenn } x \geq 1 \end{cases}$$

definitert ist, stetig in $\mathbb{R}$ ist. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

6.3. Stetigkeit II Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen in angegebenen Gebiet stetig sind.

$$\begin{aligned} D = \mathbb{R}, &\quad f(x) = \exp(\exp(x^3 - 2)), \\ D =]0, +\infty[, &\quad f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\exp(x^2) + 1}. \end{aligned}$$

6.4. Grenzwerten Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{n \to +\infty} e^{(n^3+2)/(n^3-6)},$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{1/n}}{e^{n^2/(n^2+1)} + 3}.$$

6.5. Stetigkeit III Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $x_0 \in I$, sodass $f(x_0) > 0$ ist. Zeigen Sie, dass $\delta > 0$ existiert, sodass $f(x) > 0$, wenn $|x - x_0| < \delta$ ist.

Hinweis: Anwendung der Definition der Stetigkeit mit einem gut gewählten $\varepsilon > 0$.

6.6. $\star$ **Folgen und Funktionen** Sei $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ die Funktion die durch $f(x) = \sqrt{x+1}$ definiert ist.

(a) Sei $x_0 \in [0, +\infty[$. Zeigen Sie, dass

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0|,$$

für alle $x \geq 0$.

(b) Ableiten Sie, dass f stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

(d) Die reelle Folge (a_n) sei rekursive gegeben durch

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = f(a_n), \quad \text{für } n \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) wohldefiniert ($a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$) und monoton fallend ist.

(e) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergent gegen einen Grenzwert $\ell \in \mathbb{R}$ ist, und dass die Gleichung $\ell = \sqrt{\ell + 1}$ gilt.

(f) Den Wert von ℓ ableiten.