8.1. $\star$ **Trigonometrische Funktionen**

(a) Berechnen Sie $\cos(5x)$ als Kombination von Potenzen von $\sin(x)$ und $\cos(x)$.

(b) Berechnen Sie $\sin(x)^5$ als Kombination von $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ wobei $0 \leq k \leq 5$.

8.2. $\star$ **Operationen und Grenzen** Seien f, g zwei Funktionen von $]a, b]$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \alpha + \beta, \quad \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

existieren, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ und $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ existieren.

Hinweis: Anwenden Sie das Kriterium für Grenzwerte mit Folgen

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0,$$

wenn $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ und $|f(x)| \leq |g(x)|$ für jedes $x \in]a, b]$.

8.3. Polynomdivision und Grenzen I Zeigen Sie, dass für alle ganze Zahl $d \geq 0$ und alle reelle Zahlen $u_0, \ldots, u_d$ Folgendes gilt:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(u_0 + \frac{u_1}{x} + \cdots + \frac{u_d}{x^d}\right) = u_0.$$

8.4. $\star$ **Polynomdivision und Grenzen II** Seien $d \geq 0$, $e \geq 0$ ganze Zahlen. Die reellen Polynomen $p(x)$, $q(x)$ seien gegeben durch

$$\begin{aligned} p(x) &= a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0, \\ q(x) &= b_e x^e + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

wobei $a_d \neq 0$, $b_e \neq 0$. Sei $D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$. Man beachte, dass D alle reellen Zahlen außer endlich vielen enthält.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existiert, und dass Folgendes gilt

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \frac{a_d}{b_e} > 0 \text{ und } d > e, \\ -\infty, & \text{falls } \frac{a_d}{b_e} < 0 \text{ und } d > e, \\ 0, & \text{falls } d < e, \\ \frac{a_d}{b_e}, & \text{falls } d = e. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie die gleiche Methode wie für den Grenzwert $p(n)/q(n)$ aus dem Unterricht und der vorherigen Übung.

(b) Nehmen wir an, dass $b_0 = 0$ und $b_1 \neq 0$ sind. Insbesondere ist $q(0) = 0$, und daher $0 \notin D$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert, wenn $x > 0$ ist, und dass Folgendes gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \frac{a_0}{b_1} > 0, \\ -\infty, & \text{falls } \frac{a_0}{b_1} < 0, \\ \frac{a_1}{b_1}, & \text{falls } a_0 = 0. \end{cases}$$

8.5. Grenzwerten Bestimmen Sie den folgenden Grenzwerten.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^5 + x^3 + \cos(x) + e^{-x}}{5x^4 + 1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|\cos(x)|}{x}$$

8.6. Existenz der Grenzwerten Sei $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sin(1/x)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht.

Hinweis: Finden Sie zwei Folgen (a_n), (b_n) *die gegen* 0 *konvergieren so, dass* $\lim_n f(a_n) \neq \lim_n f(b_n)$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x\to 0} x f(x) = 0.$$