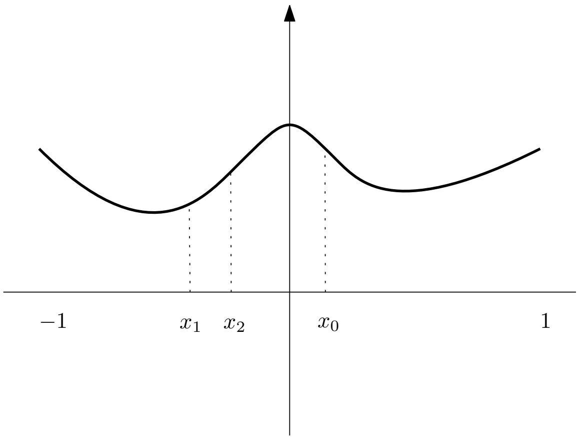
Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

9.1. MC Fragen: Differenzierbare Funktionen Wählen Sie die richtige Antwort.

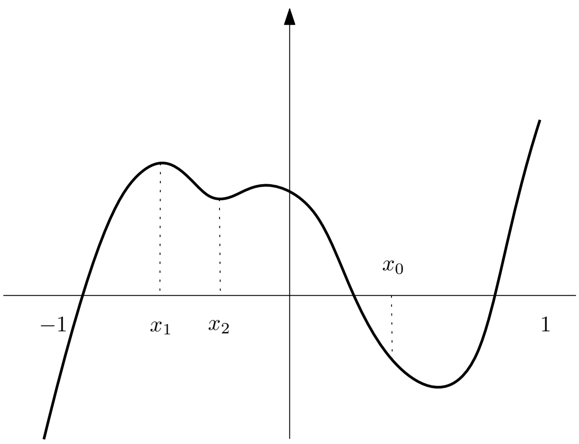
(a) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgendem Graph



Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ◯ $f'(x_0) > 0$.
- ◯ $f'(x_1) = 0$.
- ◯ $f'(x_2) < 0$.

(b) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgendem Graph



Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Funktion f besitzt ein lokales Maximum in 0.
- ◯ $f'(x_0) > 0$.
- ◯ $f'(x_1) = 0$.
- ◯ $f'(x_2) < 0$.

(c) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $]-1, 1[$ differenzierbar ist. Nehmen wir an, dass $f'(0) = 1$ ist. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ $f(x) > f(0)$ für alle $0 < x < 1$.
- ◯ Es gibt $-1 < x < y < 1$, sodass
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 1.$$
- ◯ $f(1) > f(0)$.
- ◯ Es gibt $x \in [-1, 0]$, sodass $f'(x) = 0$ ist.

9.2. Berechnung von Ableitungen Berechnen Sie die folgenden Ableitungen, wenn diese definiert sind.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x \log(x), \\
f_2(x) &= \exp(\exp(x) - 1), \\
f_3(x) &= \cos(\log(x^2 + 1)), \\
f_4(x) &= \frac{1 + x + x^2}{(2x^3 + 3)^2}.
\end{aligned}$$

9.3. ⋆ **Hyperbelfunktionen** Seien $f(x) = (e^x + e^{-x})/2$ und $g(x) = (e^x - e^{-x})/2$ zwei Funktionen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind.

(a) Zeigen Sie, dass f und g differenzierbar in $\mathbb{R}$ sind, und dass Folgendes gilt:
$$f' = g, \quad g' = f.$$

(b) Zeigen Sie, dass $f(x)^2 - g(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass g strikt monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.$$

(e) Folgern, dass g eine Bijektion ist, und dass g^{-1} differenzierbar mit Ableitung

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ist.

(f) Zeigen Sie, dass $g(x) > 0$ wenn $x > 0$ und $g(x) < 0$ wenn $x < 0$ ist.

(g) Zeigen Sie, dass f strikt monoton fallend auf $]-\infty, 0]$ und strikt monoton wachsend auf $[0, +\infty[$ ist.

(h) Sei f_1 die Einschränkung der Funktion f auf $[0, +\infty[$. Zeigen Sie, dass f_1 eine Bijektion von $[0, +\infty[$ nach $[1, +\infty[$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass f_1^{-1} differenzierbar auf $]1, +\infty[$ ist, und dass

$$(f_1^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

für alle $x > 0$.