Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

**10.1. MC Fragen: Glatte Funktionen und Extreme** Wählen Sie die richtige Antwort.

**(a)** Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass

$$f(1/2) = 2, \quad f'(1/2) = 0, \quad f''(1/2) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Maximum in $1/2$.
- ◯ Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Minimum in $1/2$.
- ◯ Die Funktion $f$ besitzt kein lokales Extremum in $1/2$.
- ◯ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

**(b)** Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Maximum in $0$.
- ◯ Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Minimum in $0$.
- ◯ Die Funktion $f$ besitzt kein lokales Extremum in $0$.
- ◯ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

**(c)** Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass

$$f(0) = 2, \quad f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0.$$

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Maximum in $0$.
- ◯ Die Funktion $f$ besitzt ein lokales Minimum in $0$.
- ◯ Die Funktion $f$ besitzt kein lokales Extremum in $0$.
- ◯ Alle oben genannten Fälle sind möglich.

**10.2.** $\star$ **Funktionsanalyse** Sei $f(x) = x\exp(1/x^2)$ für $x \in ]0, +\infty[$.

**(a)** Zeigen Sie, das $f$ glatt in $]0, +\infty[$ ist.

**(b)** Finde alle möglichen Punkte $x_0$, in denen $f$ ein lokales Extremum haben könnte.

**(c)** Bestimmen Sie, ob $x_0$, die gefunden wurden, ein lokales Extremum sind oder nicht. Wenn ja, bestimmen Sie, ob es sich um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

**10.3. Grenzwerte I** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{\sin(x^2 - x)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{-x}}{x^2 - \sin(x)}.$$

**10.4.** $\star$ **Grenzwerte II** Seien $f(x) = 2/x + \cos(1/x)$ und $g(x) = 1/x$ zwei Funktionen, die in $x > 0$ definiert sind.

**(a)** Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 2.$$

**(b)** Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert nicht.

**(c)** Warum widerspricht Punkt (b) nicht die Regel von l'Hospital und Punkt (a)?

**10.5. Polarkoordinaten** Sei $z$ eine komplexe Zahl ungleich Null. Zeigen Sie, dass es einen einzigen Wert $t \in [0, 2\pi[$ gibt, sodass

$$z = |z|e^{it}.$$

**10.6. Potenzreihen** Sei $f(x) = \exp(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

**(a)** Zeigen Sie, dass es Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f$ in der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

**(b)** Ableiten, ohne explizit die Ableitungen zu berechnen, dass

$$f^{(j)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls } j \text{ ungerade ist,} \\ \frac{j!}{(j/2)!}, & \text{falls } j \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

**10.7. Youngsche Ungleichung** Sei $p > 1$ eine reelle Zahl.

**(a)** Zeigen Sie, dass eine einzige Zahl $q > 1$ gibt, sodass $1/p + 1/q = 1$.

**(b)** Beweisen Sie, dass es

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

für alle $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt.

*Hinweis: Verwenden Sie die Konvexität der Funktion* $-\log(x)$ *in geeigneter Weise.*