Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

11.1. MC Fragen Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Welches der folgenden Polynome ist das Taylorpolynom der Ordnung 4 der Funktion $f(x) = x\log(x)^4$ in $x = 1$?

- ◯ 0
- ◯ $(x-1)^4$
- ◯ $(x-1)^3$
- ◯ $(x-1)^2$

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f integrierbar.
- ◯ f integrierbar $\Rightarrow$ f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig.
- ◯ f stetig $\Rightarrow$ f differenzierbar $\Rightarrow$ f integrierbar.
- ◯ Nichts davon ist richtig.

(c) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wir nehmen an, dass $f(x) \leq 3$ für alle $x \in [0,1]$ ist. Welche der folgenden Aussagen gilt?

- ◯ $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0$.
- ◯ $\int_0^{1/2} f(x)\,dx \leq 1$.
- ◯ $\int_0^t f(x)\,dx \leq 3t$ für alle $t \in [0,1]$.

11.2. Taylorpolynom Berechnen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 3 in $x = 0$ der Funktion

$$f(x) = \log(1 + x^2).$$

11.3. Höhere Ableitungen I Sei $f(x) = \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Erklären Sie, warum f eine glatte Funktion ist.

(b) Berechnen Sie f', f'' und prüfen Sie, dass

$$f^{(3)}(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

ist.

(c) Berechnen Sie $f^{(4)}(x)$ und seine Nullstellen, um die Extremalstellen von $f^{(3)}$ in $[-10, 10]$ zu bestimmen. Folgern, dass

$$|f^{(3)}(x)| \leq 2$$

für alle $x \in [-10, 10]$.

(d) Bestimmen Sie eine rationale Zahl c, sodass $|f(1/2) - c| < 1/10$.

Hinweise: Verwenden Sie die Taylor-Approximation der zweiten Ordnung in $x = 0$.

11.4. $\star$ **Höhere Ableitungen II** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir nehmen an, dass eine reelle Zahl $M \geq 0$ gibt, sodass

$$|f^{(n)}(x)| \leq M$$

für alle $n \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist.

(a) Für $n \geq 0$ definieren wir

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ und $k \geq 0$ zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \right| \leq \frac{M|x|^{k+1}}{(k+1)!}.$$

(c) Ableiten Sie, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) Nennen Sie ein Beispiel für eine Funktion ungleich Null, die die Annahme für einige $M \geq 0$ erfüllt.

11.5. Gleichmässige Stetigkeit Sei $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie

$$f(n + 1/n) - f(n)$$

und folgern, dass f *nicht* gleichmässig stetig ist.

11.6. Stammfunktionen Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \log(x),$$
$$f(x) = x^3 - 2x + 1,$$
$$f(x) = x\exp(x^2).$$

Hinweise: Für den ersten Fall kann man mit der Berechnung der Ableitung von $x\log(x)$ *beginnen.*

11.7. Integrale Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$\int_2^3 (x-1)^4\,dx$$
$$\int_3^4 e^x\,dx.$$