Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

12.1. MC Fragen Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Welche der folgenden Gleichungen ist richtig?

- ○ $\int f(x^2)\,dx = 2\int f(y)\,dy$
- ○ $\int xf(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int f(y)\,dy$
- ○ $\int f(x^2)\,dx = 2\int yf(y)\,dy$

(b) Welche der folgenden Gleichungen ist richtig?

- ○ $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g'(x)\,dx$
- ○ $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) + \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$
- ○ $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$

12.2. Partielle Integration Berechnen Sie

$$\int_a^b \log(x)\,dx$$

durch Partielle Integration, für alle $a, b > 0$.

12.3. Berechnung von Integralen Berechnen Sie die folgenden Integralen:

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$
$$\int_0^1 t\tan(t^2)dt$$
$$\int_0^{\pi/4} \cos(2t)^3 dt$$

12.4. Stammfunktionen Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \frac{1}{x\log(x)}, \quad x > 1$$
$$f_2(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}, \quad x > 3$$
$$f_3(x) = x^3 e^{x^2}.$$

Hinweis: Finden Sie für die zweite Aufgabe die reellen Zahlen a, b, c so, dass

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

12.5. $\star$ **Integration und Frequenzen** Seien $a > 0$, $b \geq 0$ reelle Zahlen, $a \neq b$. Die Funktionen $C(x)$ und $S(x)$ seien definiert durch

$$C(x) = \int_0^x \cos(at)\cos(bt)\,dt, \qquad S(x) = \int_0^x \sin(at)\sin(bt)\,dt$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass Folgendes gilt

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{1}{a}\sin(ax)\cos(bx) + \frac{b}{a}S(x) \\ S(x) &= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(bx) + \frac{b}{a}C(x). \end{aligned}$$

(b) Ableiten von (a) elementaren Formeln für $C(x)$ und $S(x)$.

(c) Folgern, dass wenn $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$, dann

$$\int_0^{2\pi} \cos(ax)\cos(bx)dx = 0$$

es sei denn $a = b$, und dass

$$\int_0^{2\pi} \cos(ax)\cos(bx)dx = \begin{cases} \pi & \text{falls } a = b \neq 0 \\ 2\pi & \text{falls } a = b = 0. \end{cases}$$

(d) Sei $d \geq 0$ eine ganze Zahl und seien a_0, $\ldots$, a_d reelle Zahlen. Sei f die Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1\cos(x) + \cdots + a_d\cos(dx).$$

Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \end{aligned}$$

für $1 \leq n \leq d$.