Nur die Aufgaben mit einem $\star$ werden korrigiert.

13.1. MC Fragen Wählen Sie die richtige Antwort.

(a) Welche Substitution ist am besten geeignet, um das folgende Integral zu berechnen?

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\,dx$$

- ◯ $y = \sin(x)$
- ◯ $y = \cos(x)$
- ◯ $y = 1 + \sin(x)^2$
- ◯ Keine dieser Substitutionen vereinfacht das Integral.

(b) Welche Substitution ist am besten geeignet, um das folgende Integral zu berechnen?

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)^2}\,dx$$

- ◯ $y = \sin(x)$
- ◯ $y = \cos(x)$
- ◯ $y = 1 + \sin(x)^2$
- ◯ Keine dieser Substitutionen vereinfacht das Integral.

(c) Welche Substitution ist am besten geeignet, um das folgende Integral zu berechnen?

$$\int \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)^7}\,dx$$

- ◯ $y = \sin(x)$
- ◯ $y = \cos(x)$
- ◯ $y = \sin(x)^7$
- ◯ Keine dieser Substitutionen vereinfacht das Integral.

13.2. Stammfunktionen Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}, \qquad g(x) = \frac{1}{1 + 2x - x^2}.$$

13.3. Uneigentlichen Integralen I Zeigen Sie, dass die folgenden uneigentlichen Integrale existieren.

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+2} dx$$
$$\int_0^1 \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x}} dx$$

Hinweis: Für das erste Integral kann man verwenden, dass die Funktion $x^3 e^{-x/2}$ in $[0, +\infty[$ begrenzt ist.

13.4. Uneigentlichen Integralen II Sei $f(x) = x \log(x)$, $x > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to 0} x^2 \log(x) = 0$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral der Funktion $f(x)$ in $[0, 1]$ existiert, und dass

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\frac{1}{4}$$

gilt.

13.5. Uneigentlichen Integralen III

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_1^x \cos(\pi t^2) dt = \frac{\sin(\pi x^2)}{2\pi x} + \frac{1}{4\pi} \int_1^{x^2} \frac{\sin(\pi y)}{y^{3/2}} dy$$

für alle $x \geq 1$.

Hinweis: Man kann eine partielle Integration nach eine Substitution verwenden.

(b) Folgern, dass das uneigentliche Integral

$$\int_1^{+\infty} \cos(\pi t^2)\, dt$$

existiert, obwohl

$$\lim_{t \to +\infty} \cos(\pi t^2)$$

nicht gleich Null ist.

13.6. Sei $f(x) = \tan(x/2) = \sin(x/2)/\cos(x/2)$ definiert für alle $|x| < \pi$. Aus den Eigenschaften der Tangensfunktion geht hervor, dass f eine wachsende Bijektion von $]-\pi, \pi[$ nach $\mathbb{R}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\cos(x) = \frac{1 - f(x)^2}{1 + f(x)^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2f(x)}{1 + f(x)^2}$$

für $|x| < \pi$.

(b) Zeigen Sie, dass f differezierbar ist, und dass

$$f'(x) = \frac{1 + f(x)^2}{2}$$

für $|x| < \pi$.

(c) Berechnen Sie unter Verwendung der Substitution $t = f(x)$ eine Stammfunktion von

$$g(x) = \frac{1}{\cos(x) + \sin(x)}$$

für $|x| < \pi$.

Hinweis: Verwenden Sie auch einen Teil von Aufgabe 2.