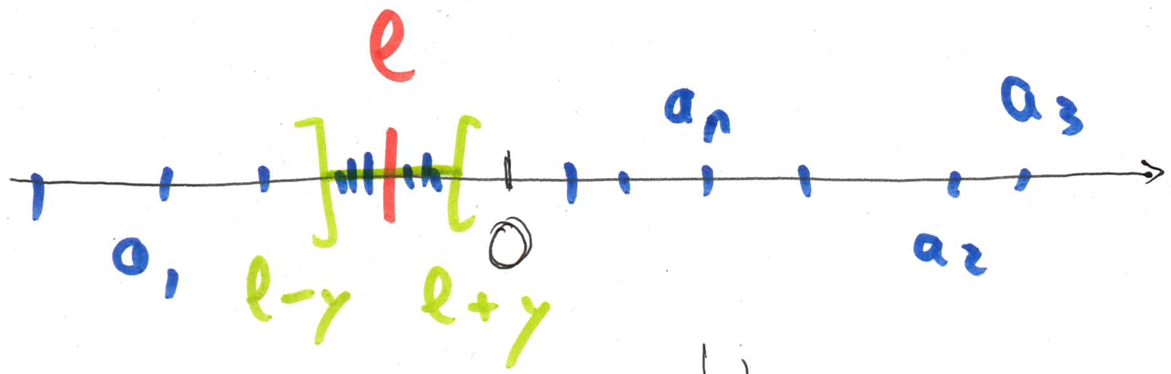
<u>Hilfsatz</u> (2.1.3).

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge <u>reeller</u> Zahlen.

Es gibt <u>höchstens</u> eine reelle Zahl ℓ, sodass:



($\forall y > 0$, es gibt nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - \ell| \geq y$.

($\iff$ $a_n \notin \,]\ell - y, \ell + y[$))

__Definition__ – (2.1.4)

Die Folge (a_n) konvergiert falls eine Zahl ℓ existiert mit der Eigenschaft oben, ℓ ist dann eindeutig, und ist den __Grenzwert__ der Folge, bezeichnet:

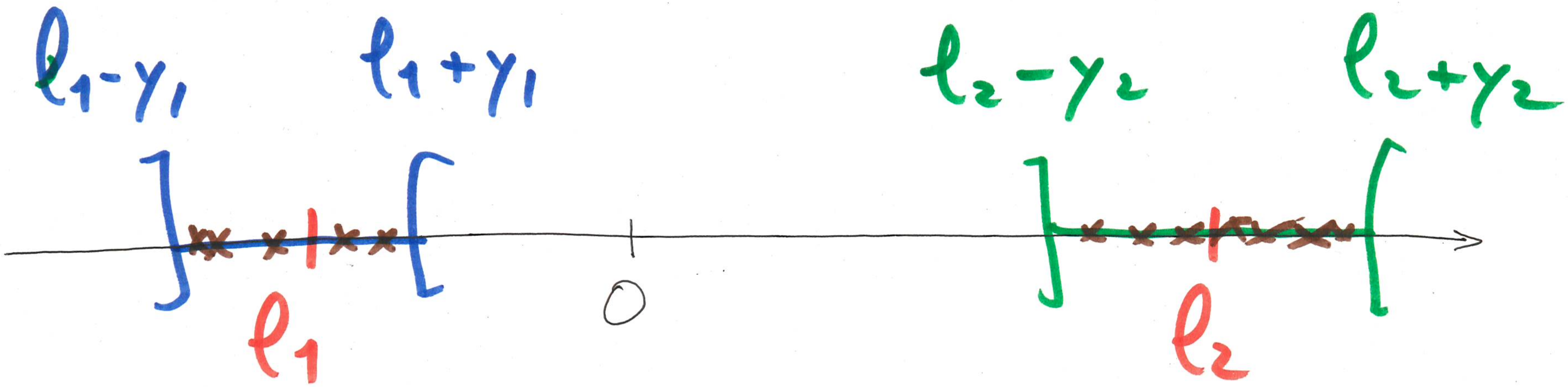
$$\boxed{\ell = \lim_{n \to +\infty} a_n}$$

oder

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell}$$

Falls (a_n) __nicht__ konvergent ist, sagt man sie ist __divergent__.

Beweis vom Hilfsatz: (Widerspruch)



$(l_1 \neq l_2)$ Es gibt $y_1, y_2 > 0$

$$]l_1 - y_1, l_1 + y_1[\cap]l_2 - y_2, l_2 + y_2[= \emptyset$$

Fast alle a_n sollen in beide Intervalle liegen, was unmöglich ist!

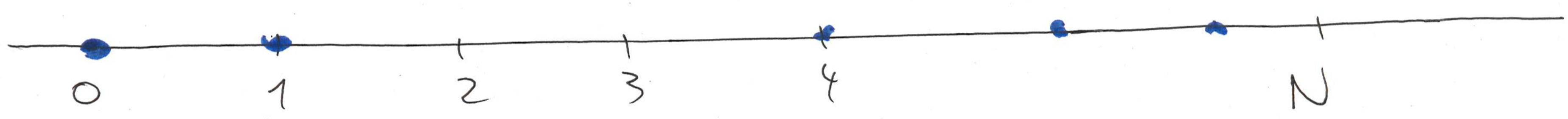
Bemerkungen –

(1) Die Existenz der Grenzwert gilt nicht für alle Folgen!

Die Notation "$\lim a_n$" kann **nur** benutzt werden, wenn man überprüft hat, dass der Grenzwert existiert!

$\boxed{\text{[Wichtig für Prüfung!]}}$

(2) Eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ ist endlich $\Longleftrightarrow$ es gibt $N \in \mathbb{N}$ sodass $(n \geq N \Rightarrow n \notin A)$.



[z.B : $N = \text{Max}(A) + 1$].

D.h. $\ell = \lim_{n \to \infty} a_n \Longleftrightarrow$

$$\boxed{\forall y > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |a_n - \ell| < y}$$

(3) Wir schreiben:

"$\forall y > 0, \ldots$"

aber nur "kleine" y sind wichtig

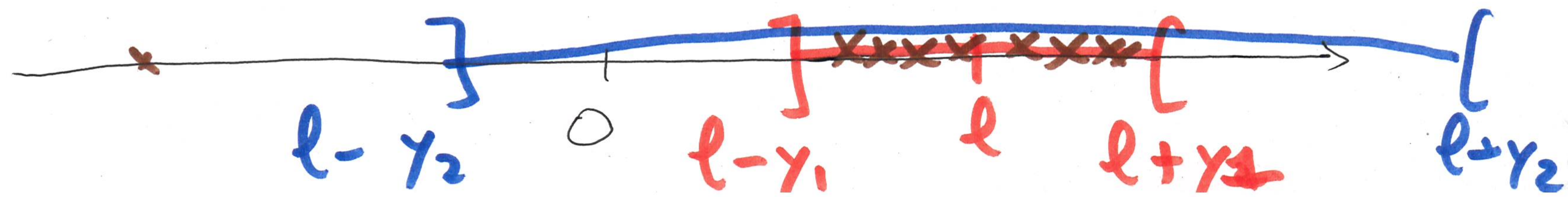
weil wenn eine Zahl $y_1 > 0$

erfüllt

"$\exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ |a_n - \ell| < y_1$"

dann ist die ähnliche Bedingung

für <u>alle</u> <u>$y_2 \geq y_1$</u> erfüllt.



(4) "Die Existenz / Wert vom $\lim a_n$ hängt nur von a_n für "n gross genug" ab":

Falls $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$

und definieren $b_n = \begin{cases} \text{ganz zufällig, z.B. } b_n = n, & n < 10^{10^{10^{10}}} \\ a_n, & n \geq 10^{10^{10^{10}}} \end{cases}$

Dann $\boxed{b_n \longrightarrow \ell}$ <u>auch</u>.

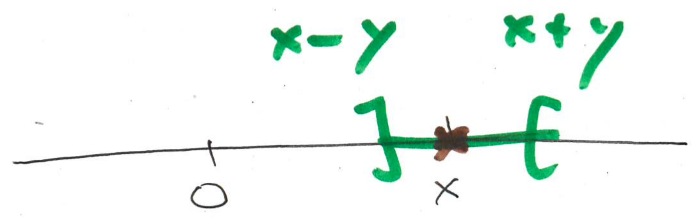
Ähnlicherweise: $b_n = a_{n+k}$, $\boxed{b_n \longrightarrow \ell}$

($k \in \mathbb{N}$ feste Zahl)

Beispiel:

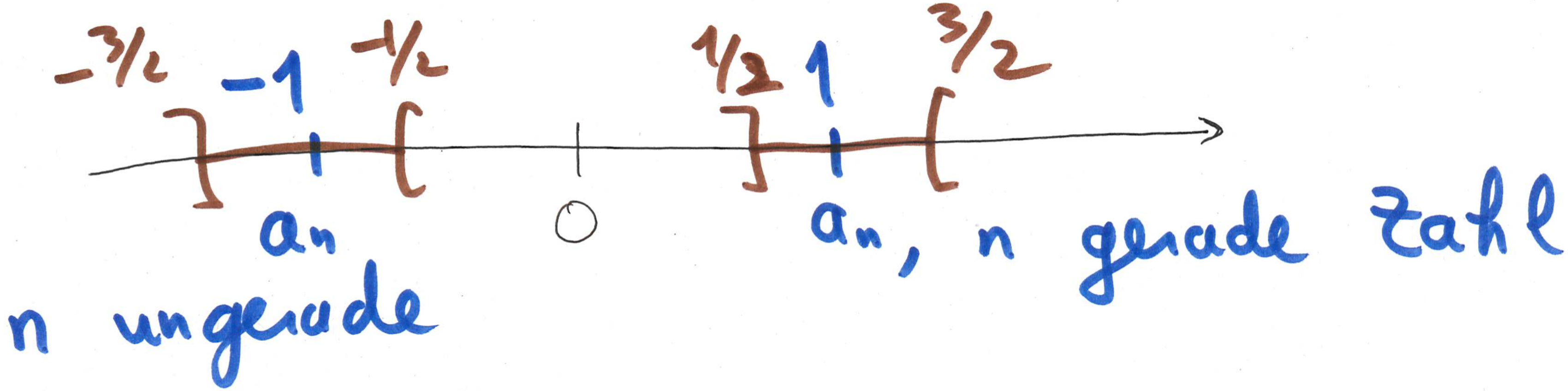
(1) Sei $x \in \mathbb{R}$: $a_n = x$, $n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$$



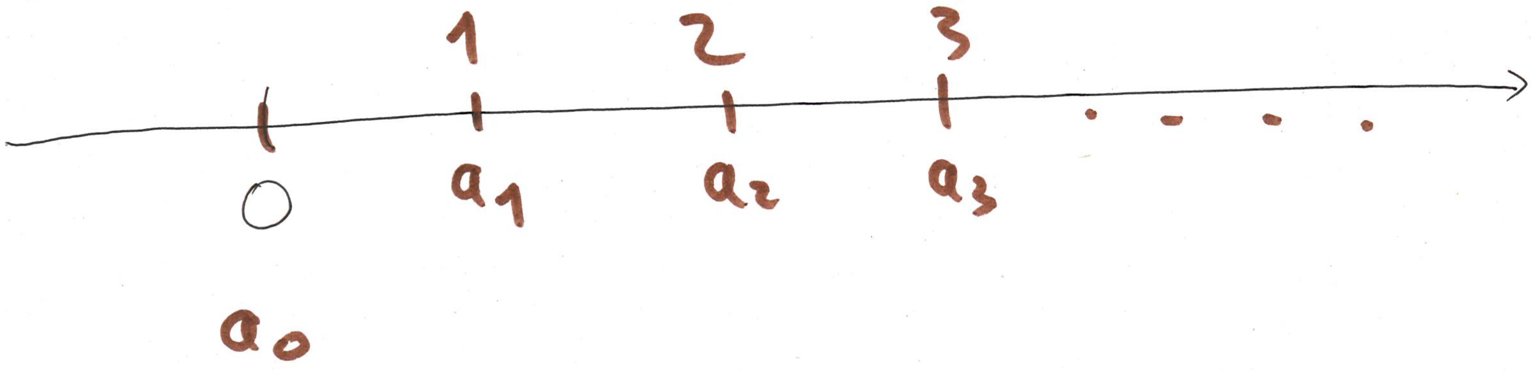
(2) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

$(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$



Dann gibt es kein Grenzwert!

(3) $a_n = n \quad , \quad n \geq 0$



$\Rightarrow$ kein Grenzwert.

<u>Hilfsatz</u> - Jede konvergente Folge ist beschränkt (d.h. $\exists C \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq C$)

$\Leftrightarrow \exists C \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [-C, C]$

Bemerkungen:

(1) $\left(a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\right) \iff \left(|a_n - \ell| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$

und (b_n) konvergiert gegen 0

$\Updownarrow$

$\left(\forall y > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |b_n| < y\right)$

(2) "Vergleichsprinzip": falls (c_n) konvergiert gegen 0 und $\forall n\ 0 \leq |a_n| \leq c_n$, dann folgt $\boxed{a_n \longrightarrow 0}$.

Satz 2.1.8.

Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen

mit $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$.

(1) $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow a + b$

(2) $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow a\,b$

(3) Falls $b \neq 0$, ist $b_n \neq 0$ für n gross genug (z.B. $n \geq N$), und $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N} \longrightarrow \frac{a}{b}$.

(4) Falls $a_n \leq b_n$ für alle n, ist $a \leq b$.

[<u>Vorsicht!</u> $a_n < b_n$ für $n \in \mathbb{N}$ impliziert **nicht** dass $a < b$!]

<u>Beweis</u>. (2) + (4): siehe Skript.

(1) $|(a_n + b_n) - (a + b)|$

$= |(a_n - a) + (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b|.$

(Dreiecksungl.)

Sei $\gamma > 0$. Weil $a_n \longrightarrow a$ gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$ sodass $|a_n - a| < \frac{\gamma}{2}$ für $n \geq N_1$.

Weil $b_n \longrightarrow b$ gibt es $N_2 \in \mathbb{N}$ sodass

$|b_n - b| < \frac{\gamma}{2}$ für $n \geq N_2$.

Sei $N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$.

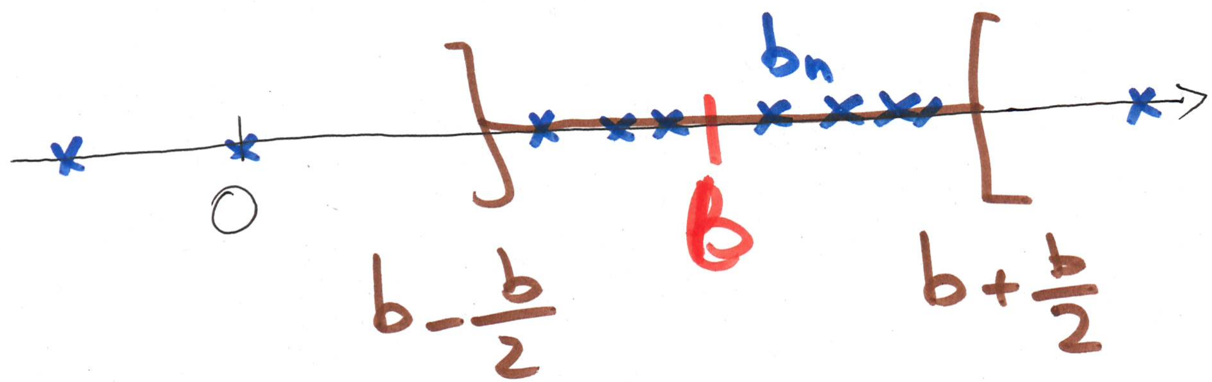
Für $n \geq N$, ist $\begin{cases} n \geq N_1 \\ n \geq N_2 \end{cases}$ sodass

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} = \gamma.$$

D.h. $\lim (a_n + b_n) = a + b$.

Die Folge konvergiert, und . . .

(3) $b \neq 0$: wir wissen dass



$|b_n| \in \left]\frac{|b|}{2}, \frac{3|b|}{2}\right[$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit endlich viele Ausnahmen, d.h.:

$$\boxed{\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, |b_n| \geq \frac{|b|}{2} > 0}$$

Wir überlegen jetzt nur $n \geq N_0$.

weil $\frac{1}{|b_n|} \leq \frac{2}{|b|}$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|a_n b - a b_n|}{|b_n b|} \leq \frac{1}{|b|} \frac{2}{|b|} |a_n b - a b_n|$$

Weiter ist

$$|a_n b - a b_n| = |(a_n - a) b + ab - a b_n|$$
$$= |(a_n - a) b + a(b - b_n)|$$
$$\leq |b| \, |a_n - a| + |a| \, |b - b_n|$$

Sei $\underline{\gamma > 0}$: es gibt N_1 sodass

$$|b| \, |a_n - a| < \frac{|b|^2}{2} \frac{\gamma}{2} \text{ für } n \geq N_1$$

und es gibt N_2 sodass

$$|a| \, |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \frac{\gamma}{2} \text{ für } n \geq N_2$$

Für $n \geq \max(N_0, N_1, N_2)$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2}{|b|^2} \cdot \left(\frac{|b|^2}{2} \cdot \frac{\gamma}{2} + \frac{|b|^2}{2} \cdot \frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \gamma$$

<u>Beispiel</u> (1) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$

Es gilt $a_n \longrightarrow 0$ (weil $|a_n| = \frac{1}{n} < \gamma$

für jede $n \geq \frac{1}{\gamma}$)

(2) $a_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$ weil $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$.

(3) $a_n = \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$ weil

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

(4) $a_n = \frac{1}{n!} \longrightarrow 0$ weil

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$$

(5) $$a_n = 2 + \frac{\cos\left(n! + 2^{3n!} - 10 + (-1)^{n^2+1}\right)}{n}$$

Weil $|a_n - 2| \leq \frac{1}{n} \rightsquigarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

(6) $$\frac{n+1}{n} = \frac{1+1/n}{1} = 1 + \frac{1}{n}$$

$(n \geq 1)$

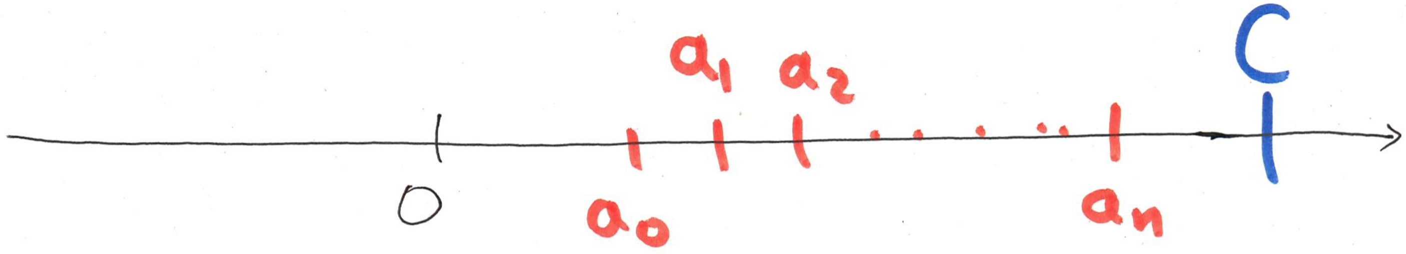
$$\underbrace{1 + 0}_{} \longrightarrow 1$$

2.2 – Monotone Folgen

Satz – (2.2.3) (a_n) Folge reeller Zahlen.

(1) Falls (a_n) wachsend ist [d.h. $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_{n+1} \geq a_n$], ist sie

<u>konvergent</u> $\Leftrightarrow$ es gibt $C \in \mathbb{R}$ sodass $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq C$



Der Grenzwert ist

$$\boxed{\lim a_n = \operatorname{Sup}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

(2) Falls (a_n) <u>fallend</u> ist ($a_{n+1} \leq a_n$ für $n \in \mathbb{N}$), ist (a_n) konvergent $\Leftrightarrow$ es gibt $C \in \mathbb{R}$ sodass $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq C$, und dann

$$\lim a_n = \operatorname{Inf}\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

23