Beispiel. (4.2.18)

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

für $n \geq 1$, $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

"geometrische "Mean" "

arithmetische Durchschnitt

z.B. $n = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

weil $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$

Beweis mit Konvexität:

$$f(x) = -\log(x) \quad \text{auf} \quad]0, +\infty[$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \qquad \text{(glatt = "smooth")}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

$$\Rightarrow f \text{ ist konvex auf }]0, +\infty[$$

$$\Rightarrow \text{mit} \left\{ \begin{array}{l} t_i = \frac{1}{n}, \quad 1 \leq i \leq n \\ x_i \text{ gegebene Zahlen} \end{array} \right.$$

$$f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\log\left(\frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) \leq -\frac{\log(x_1)}{n} - \dots - \frac{\log(x_n)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\log(x_1)}{n} + \dots + \frac{\log(x_n)}{n} \leq \log\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)$$

exp ist wachend

$$\Rightarrow \quad \exp\left(\frac{\log(x_1)}{n} + \dots + \frac{\log(x_n)}{n}\right) \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \exp\left(\frac{\log(x_1)}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \exp\left(\frac{\log(x_n)}{n}\right) \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\sqrt[n]{x_1} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

[Anders gesagt:

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$$
]

4.4 – Taylor Polynome / Entwicklung

Frage: kann man eine gegebene Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

mit $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{Polynome approximieren.}} \\ \text{Potenzreihen darstellen.} \end{array} \right.$

Satz. (4.4.1) Seien $a < b$ reellen ~~Zahlen~~ Zahlen, und $f_n :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$

(mit $a = -\infty$, $b = +\infty$)

Hypothesen: (1) f_n ist auf $]a,b[$ stetig differenzierbar ($\Longleftrightarrow$ f_n' existiert und sind stetig)

(2) es gibt $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

sodass $f_n \longrightarrow f$ auf $]a,b[$, gleichmässig

(3) es gibt $g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

sodass $f_n' \longrightarrow g$ auf $]a,b[$, gleichmässig

Dann ist f differenzierbar auf ~~[illegible]~~ $]a,b[$, und $f' = g$.

[D.h. $(\lim f_n)' = \lim f_n'$, wenn die Hyp. erfüllt sind; ein Fall von Vertauschung von Grenzwerte]

Beweis: siehe Skript.

Bemerkung: die zusätzliche Hypothese, dass $f_n' \longrightarrow g$ braucht man in der Regel.

~~[illegible]~~ Für jede stetige Funktion $(a < b \text{ in } \mathbb{R})$ $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

kann man <u>Polynome</u> f_n finden sodass

$f_n \longrightarrow f$ auf $[a,b]$, gleichmässig.

Wenn f <u>nicht</u> differenzierbar ist, d.h. der Grenzwert einer Folge von glatte Funktionen ist nicht immer differenzierbar.

~~[illegible]~~ Für $a=0$, $b=1$, kann man

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

definieren (Bernstein Polynome von f)

Satz (f stetig) $f_n \longrightarrow f$ gleichmässig auf $[0,1]$.

[Es gibt Anwendungen z.B. in der Computer Graphik (Splines)]

Beispiel. **Potenzreihen**

Satz. (4.4.2, Kor. 4.4.3).

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge von reellen Zahlen, sodass die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

hat Konvergenzradius $r > 0$ ($r = +\infty$ erlaubt)

[Erinnerung: d.h. $\sum a_n x^n$ konv. absolut für $|x| < r$, divergiert für $|x| > r$]

Dann ist die Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

für $]-r, r[$ differenzierbar mit

$$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

d.h. $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$, $x \in]-r, r[$

(wie als ob f ein Polynom vom Grad $+\infty$ wäre), und der Konvergenzradius ist auch r.

($\Rightarrow$ f ist ~~[illegible]~~ unendlich vielmal differenzierbar, d.h. glatt).

<u>Beweis</u>: siehe Skript

Warum ist der Konvergenzradius für f'

63

auch r?

Die ~~g~~ Gliedern für f' sind

$$(n+1)\, a_{n+1}$$

$\rightsquigarrow$ ~~eine~~ "grösser" als für f

$\rightsquigarrow$ die Potenzreihe für f divergiert wenn $|x| > r$

$\rightsquigarrow$ aber "nicht so viel" grösser:

<u>z.B.</u> mit Quotientenkriterium

$$\frac{(n+2)\, a_{n+2}\, x^{n+1}}{(n+1)\, a_{n+1}\, x^{n}} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}_{\to 1} \cdot \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot x$$

sodass das Kriterium für $\sum a_n x^n$ ist erfüllt $\iff$ es ist für $\sum (n+1) a_{n+1} x^n$ erfüllt.

Korollar. Falls $f :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(r > 0)$ ist die Summe einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, sind die Koeffizienten a_n eindeutig:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

z.B. $f = \exp$, $f^{(n)} = \exp$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\exp(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Beweis:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$\Rightarrow \quad f(0) = a_0$$

und $$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad f'(0) = a_1$$

und $$f''(x) = 2a_2 + \dots + (n-1)n\, a_n x^{n-2} + \dots$$

$$\Rightarrow \quad f''(0) = 2a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$$

und (Induktion)

$$f^{(n)}(x) = n!\,a_n + (\cdots)x + (\cdots)x^2 + \ldots$$

$$f^{(n)}(0) = n!\,a_n$$

Es gibt Beispiele von Funktionen die glatt sind, aber <u>nicht</u> die Summe der Potenzreihe sind, d.h.

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

[Beispiel 4.4.4, wo $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \geq 1$, aber $f(x) > 0$ für $x > 0$]

67

Trotzdem:

Definition (Taylor Polynome)

Sei $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in]a,b[$

Hyp.: es gibt $n \geq 0$ sodass $f, \dots, f^{(n)}$ existieren auf $]a,b[$.

Das Polynom

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

heisst Taylor Polynom der Ordnung n (an x_0).

[Für $x_0 = 0$:

$$f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots \quad]$$

<u>Satz 3</u> – $\binom{4.4.5}{4.4.6}$

$f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

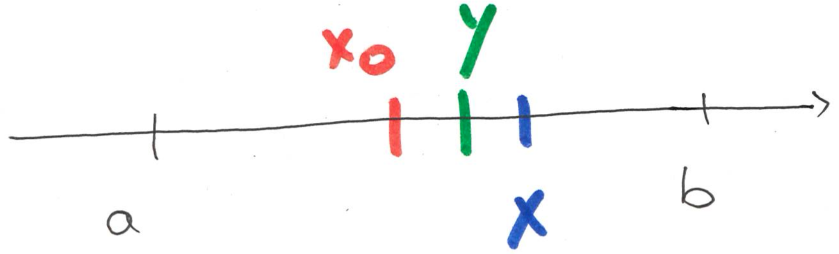
$n \geq 0$

f ist $(n+1)$-mal stetig differenzierbar

Sei $x_0 \in]a,b[$.

Für $x \in]a,b[$ es gibt y

zwischen x_0 und x



mit

$$f(x) = \left(\text{Taylor Pol. vom Ordnung } n \text{ an } x_0\text{, evoluiert an } x\right) + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(D.h., das Taylor Polynom der Ordnung n ist eine gute Approximation für $f(x)$

wenn $|x - x_0|$ "klein" ist, falls $f^{(n+1)}$ nicht zu gross ist.]

<u>**Beispiel**</u> – <u>$n = 0$</u>

$$\exists y, \quad f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(y)$$

$$\Rightarrow \exists y, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(y)$$

(Satz 4.2.4)

<u>**Beweis**</u> – Siehe Skript.
(Siehe auch Kapitel <u>V</u>)

Korollar. (4.4.8)

$a < x_0 < b$

$f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$

f 2-mal $\boxed{\text{stetig}}$ differenzierbar

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$:

(1) wenn $f''(x_0) > 0$, hat f ein ~~...~~ lokales Minimum an x_0

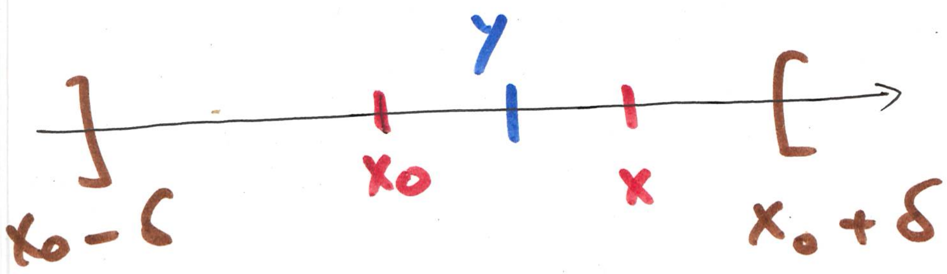
(2) ——— $f''(x_0) < 0$, ———

——— Maximum

__Beweis__. Es gilt

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(y)$$

wo y zwischen x und x_0 liegt.



D. h.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(y)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0) = \underbrace{\frac{(x-x_0)^2}{2}}_{\geq 0} \cdot f''(y)$$

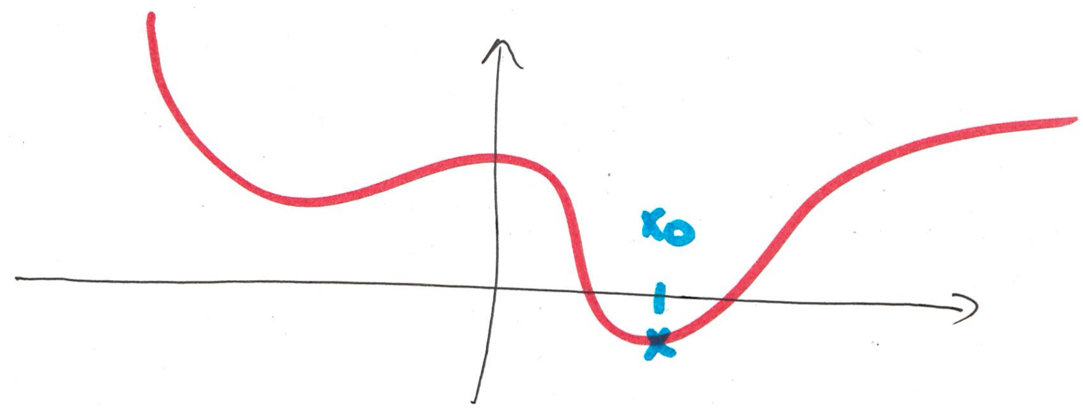
Falls $f''(x_0) > 0$: weil f'' ist <u>stetig</u>, gibt es $\delta > 0$ sodass

$$f''(y) > 0 \quad \text{falls} \quad x_0 - \delta < y < x_0 + \delta$$

$\Rightarrow$ falls $|x - x_0| < \delta$, folgt dass

$$f(x) - f(x_0) = (\geq 0) \cdot (> 0) \geq 0$$

$\Rightarrow$ f hat ein lokales <u>Minimum</u> an x_0



Verallgemeinerung:

Kor. (4.4.7)

$n \geq 0$, f $(n+1)$-mal stetig diff. auf $]a,b[$

$x_0 \in]a,b[$

Hyp. $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$

(1) Falls x_0 ein lok. Extremum ist, <u>und</u> n ist eine gerade Zahl, folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$

(2) Wenn n ist eine <u>ungerade</u> Zahl

<u>und</u> $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, folgt:

(2a) Wenn $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ hat

f ein lok. <u>Minimum</u> an x_0

(2b) ——— $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ ———

——— Maximum an x_0.