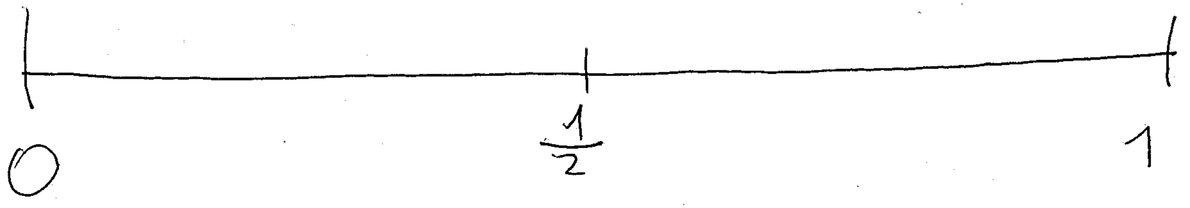
Beweis [Wiederholung] $\boxed{0 \leq a_n \leq 1}$



Behauptung: $\forall\, k \geq 0$, es gibt $[c_k, d_k] \subset [0,1]$

sodass:

(1) $0 \leq c_k \leq c_{k+1} \leq d_{k+1} \leq d_k \leq 1$

(2) $d_k - c_k = \frac{1}{2^k}$

(3) $\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \in [c_k, d_k] \}$ ist <u>unendlich</u>

Wir nehmen dies an: wir definieren dann

$b_k = a_{t(k)}$ durch Induktion:

(1) $b_0 = a_0 \in [c_0, d_0]$

(2) Falls b_{k-1} definiert ist, sei

$t(k) \in \mathbb{N}$ sodass

(2a) $\boxed{t(k) > t(k-1)}$

(2b) $b_k = a_{t(k)} \in [c_k, d_k]$

[$t(k)$ existiert weil es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in [c_k, d_k]$]

Dann gilt: die Folge $(b_k)_{k \geq 0}$ konvergiert.

Warum? $\quad c_k \leq b_k \leq d_k$.

und (c_k) ist wachsend / beschränkt

(d_k) ist fallend / "

so $\begin{cases} \ell = \lim c_k & \text{existiert} \\ \ell' = \lim d_k & \text{existiert} \end{cases}$

Weiter $\quad \underbrace{|d_k - c_k|}_{\downarrow} = \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{\downarrow}$

$|\ell' - \ell| = 0$

was bedeutet $\ell = \ell'$.

Aber dann ist $\quad |b_k - \ell| \leq d_k - c_k \longrightarrow 0$

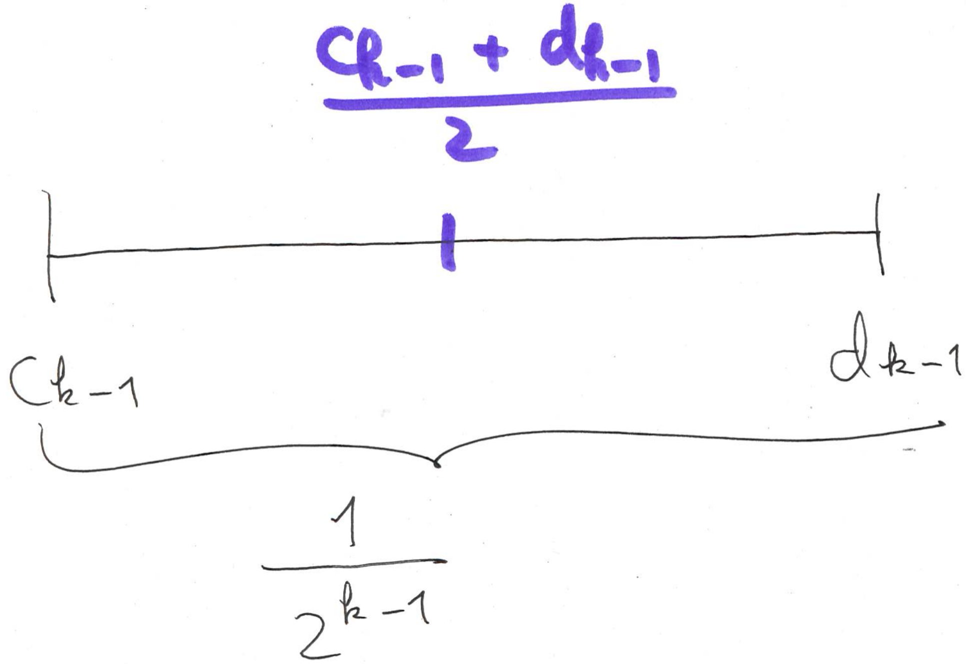
d.h. $\lim b_k$ existiert, ist $= \ell = \ell'$.

__Beweis der Behauptung__: Induktion,

für $k = 0$, sei

$c_0 = 0$, $d_0 = 1$

Wir nehmen an, c_{k-1}, d_{k-1} definiert sind.



$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in [c_{k-1}, d_{k-1}]\} = A \cup B$$

wo

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_n \in \left[c_{k-1}, \frac{c_{k-1}+d_{k-1}}{2}\right]\right\}$$

$$B = \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_n \in \left(\frac{c_{k-1}+d_{k-1}}{2}, d_{k-1}\right]\right\}$$

Induktion: **unendliche Menge** $= A \cup B$

$\Longrightarrow$ entweder A oder B ist unendlich (vielleicht beide).

Falls A unendlich ist, sei

$$\begin{cases} c_k = c_{k-1} \geq c_k \\ d_k = \dfrac{c_{k-1} + d_{k-1}}{2} \leq d_{k-1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad d_k - c_k = \frac{d_{k-1} - c_{k-1}}{2} = \frac{1/2^{k-1}}{2} = \frac{1}{2^k}$$

Sonst ist B unendlich; sei

$$\begin{cases} c_k = \dfrac{c_{k-1} + d_{k-1}}{2} \geq c_{k-1} \\ d_k = d_{k-1} \leq d_k \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad d_k - c_k = \frac{1}{2^k}$$

<u>Def.</u> (a_n) Folge

(b_k) konvergente Teilfolge von (a_n), $\ell = \lim b_k$.

Man sagt ℓ ist ein <u>Häufungspunkt</u> der Folge.

<u>Beispiele</u> (1) $a_n = (-1)^n$

$\longrightarrow$ $1, -1$ sind Häufungspunkte

(und es gibt kein andere)

(2) Falls (a_n) konvergent ist, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$; jede Teilfolge von (a_n) konvergiert, mit Grenzwert ℓ.
(Nur ℓ ist Häufungspunkt)

(3) Es kann sein, dass (a_n) <u>unendlich viele</u> Häufunspunkte hat!

Sei $a_n = \cos(\sqrt{2}\, n) \in [-1, 1]$;
jede Zahl $\ell \in [-1, 1]$ ist

Häufungspunkt dieser Folge!

2.6 _ Folgen in $\mathbb{C}$ [oder $\mathbb{R}^d$] und Grenzwerte $+\infty$, $-\infty$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Folge von komplexe Zahlen

$$a_n = \underbrace{b_n}_{\text{Realteil}} + i \overbrace{c_n}^{\text{Imaginärteil}}$$

(a_n) ist durch ~~[illegible]~~ zwei Folgen reeller Zahlen bestimmt

Satz. Sei $a_n = b_n + i c_n \in \mathbb{C}$, und
$\ell = u + iv \in \mathbb{C}$

Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

(1) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \underbrace{|a_n - \ell|}_{\sqrt{(b_n - u)^2 + (c_n - v)^2}} < \varepsilon$

(2) $(|a_n - \ell|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0

(3) $b_n \longrightarrow u$ und $c_n \longrightarrow v$

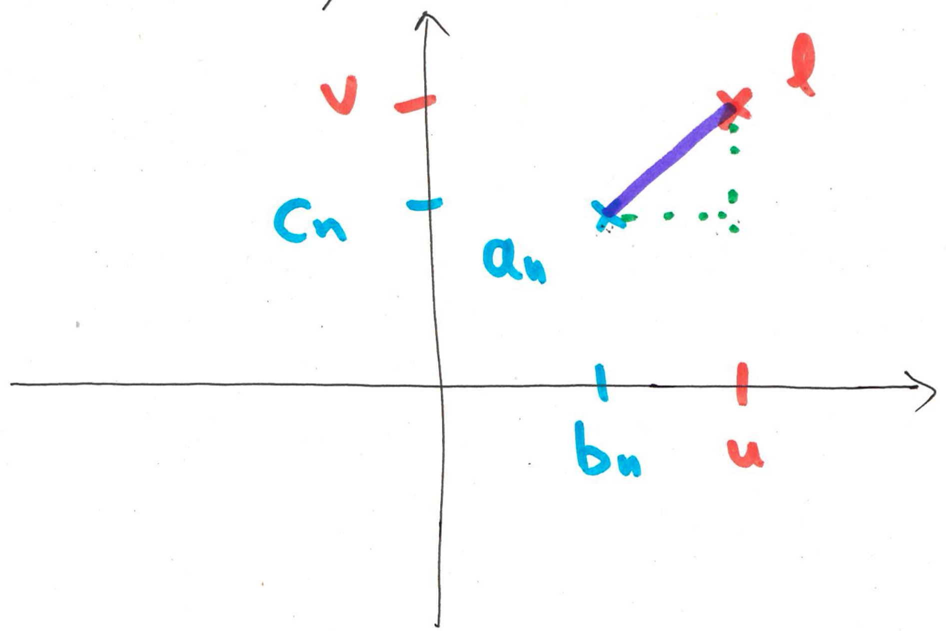
$\Big(\mathrm{Re}(a_n) \longrightarrow \mathrm{Re}(\ell)$ und $\mathrm{Im}(a_n) \longrightarrow \mathrm{Im}(\ell) \Big)$

Dann sagt man dass $(a_n) \longrightarrow \ell$; $\boxed{\lim a_n = \ell.}$

Beweis - Man überprüft

$$\max\left(|b_n - u|, |c_n - v|\right) \leq |a_n - \ell| \leq |b_n - u| + |c_n - v|$$

Dreiecksungleichung



Dass (1) $\Leftrightarrow$ (3) folgt.

Beispiel. Sei $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$

Sei

$$a_n = 1 + q + \dots + q^n, \quad n \geq 0$$

$$(a_n) = \left(1,\ 1+q,\ 1+q+q^2,\ 1+q+q^2+q^3,\ \dots\right)$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$$

Beweis:

$$a_n = 1 + \dots + q^n$$
$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

(Induktion)

sodass

$$\left| a_n - \frac{1}{1-q} \right| = \left| \frac{-q^{n+1}}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{|1-q|}$$

Weil $0 \leq |q| < 1$, $\lim_{n\to\infty} |q|^{n+1} = 0$, gilt

dann $\lim_{n\to\infty} \left| a_n - \frac{1}{1-q} \right| = 0$

d.h. $\boxed{a_n \longrightarrow \frac{1}{1-q}}$.

Fast alles was für reellen Folgen gilt, gilt auch für komplexe, mit Ausnahme **kein** liminf oder limsup.

Satz. (1) Falls $\begin{cases} a_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{C} \\ b_n \longrightarrow \ell' \in \mathbb{C} \end{cases}$

gilt $\quad a_n + b_n \longrightarrow \ell + \ell'$

$a_n b_n \longrightarrow \ell \ell'$

falls $\ell' \neq 0$, $\quad \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \frac{\ell}{\ell'}$

[$b_n \neq 0$ für n gross genug]

(2) $a_n \longrightarrow \ell \iff |a_n - \ell| \longrightarrow 0$

(3) $\left(|a_n| \leq b_n \text{ und } b_n \longrightarrow 0\right)$

$\Longrightarrow a_n \longrightarrow 0$

<u>Satz</u> – (2.6.6) (a_n) Folge <u>komplexer</u> Zahlen

(1) [Cauchy Kriterium]

(a_n) konvergiert $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m,$
$\left(n \geq N, m \geq N \Longrightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon\right)$

(2) [Bolzano-Weierstrass]

Falls (a_n) <u>beschränkt</u> ist, gibt es (mindestens) eine konvergente Teilfolge.

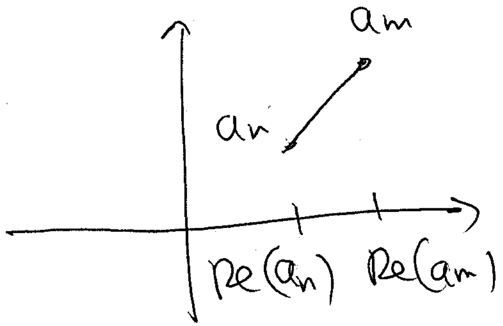
Beweis

(1) a_n konvergiert $\iff \left\{ \begin{array}{l} Re(a_n) \\ Im(a_n) \end{array} \right.$ konvergieren.

Weil $|Re(a_n) - Re(a_m)|$

$$= |Re(a_n - a_m)|$$

$$\leq |a_n - a_m|$$

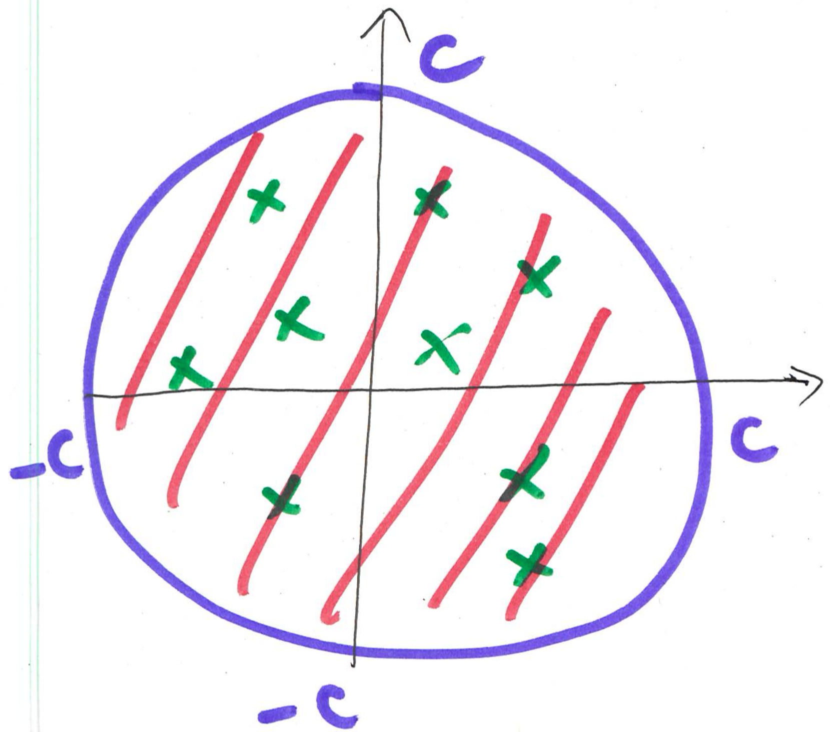


$\implies (Re(a_n))$ erfüllt das Cauchy Kriterium (bzw. $Im(a_n)$)

d.h. $(Re\, a_n)$ konvergiert und auch $(Im\, a_n)$.

(2) $a_n = b_n + i c_n \; , \quad b_n, c_n \in \mathbb{R}$

(a_n) beschränkt $[$d.h. $\exists C \geq 0, \; |a_n| \leq C]$



$\Rightarrow \left.\begin{matrix}(b_n) \\ \text{und} \\ (c_n)\end{matrix}\right\}$ sind beschränkt

$\overset{\text{B-W}}{\Longrightarrow}$ es gibt $(b_{t(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent

$\Rightarrow (c_{t(k)})$ ist beschränkt

$\overset{\text{B-W}}{\Longrightarrow}$ es gibt $(c_{s(t(k))})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent.

86

Dann ist $\left(b_{\underline{\underline{s}}(t(k))}\right)$ eine Teilfolge

von $\left(b_{t(k)}\right)$, insb. ist auch konvergent.

D.h. $a_{s(t(k))} = b_{s(t(k))} + i\, c_{s(t(k))}$

ist eine Folge komplexer Zahlen

mit konvergent Realteil / Imaginärteil

$\Rightarrow$ sie ist eine konvergente Teilfolge

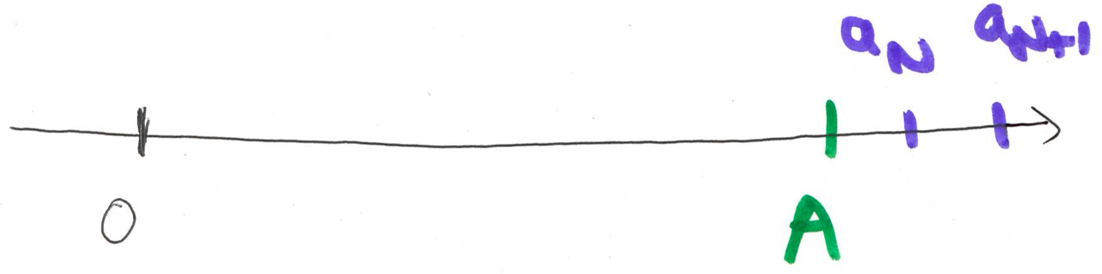
von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definition. (a_n) Folge <u>reeller</u> Zahlen

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $\boxed{+\infty}$ ("+ Unendlich")

(bzw. $\boxed{-\infty}$ ("minus Unendlich")

$\Updownarrow$



$\forall A \in \mathbb{R},$
$\exists N \in \mathbb{N},$
$\forall n \geq N, \quad a_n > A$

(bzw. $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad a_n < A$)

Beispiele:

(1) $a_n = n$: $a_n \longrightarrow +\infty$

$a_n = -n$: $a_n \longrightarrow -\infty$

(2) $a_n = (-1)^n n$:

$(a_n) = (0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots)$

Diese Folge konvergiert **nicht** gegen $\ell \in \mathbb{R}$ [nicht beschränkt], aber auch **nicht** gegen $+\infty$ oder $-\infty$.

[Eine unbeschränkte Folge ist nicht immer gegen $+\infty/-\infty$ konvergent]

(3) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$: wir haben gesehen, dass diese Folge nicht konvergent ist. Aber in diesem Fall (<u>wachsende</u> Folge) <u>konvergiert</u> sie <u>gegen</u> $+\infty$.

<u>Satz</u> – Falls (a_n) wachsend ist (bzw. fallend), gilt:

entweder ist (a_n) <u>beschränkt</u> und konvergiert

<u>oder</u> (a_n) ist <u>unbeschränkt</u> und $a_n \to +\infty$ (bzw. $a_n \to -\infty$)

90

__Beweis__. Sei (a_n) unbeschränkt:

$\forall A \in \mathbb{R}, \ \exists N \in \mathbb{N}, \quad a_N > A$

Für $n \geq N$, gilt $a_n \geq a_N > A$.

wachsende Folge

d.h.

$$\boxed{\lim a_n = +\infty.}$$

Satz: (a_n), (b_n) Folgen, $b_n \to +\infty$.

(1) Falls (a_n) ist beschränkt, gilt

$$a_n + b_n \longrightarrow +\infty$$

[z.B. $n + (-1)^n \longrightarrow +\infty$]

(2) Falls $a_n \longrightarrow \ell$, folgt

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0.$$

[z.B. $\frac{1}{b_n} \longrightarrow 0$]

(3) Falls $a_n \to 0$, $a_n > 0$, $\frac{1}{a_n} \longrightarrow +\infty$

Beweis. (1) einfach

(2): es ist genug, $\frac{1}{b_n} \longrightarrow 0$ zu überprüfen (weil $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$)

$e \qquad 0$

$\underline{b_n \to \infty}$: $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ b_n > A$

Sei $\varepsilon > 0$; $A = \frac{1}{\varepsilon} > 0$;

$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\quad b_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$

$\Updownarrow$

$\left|\frac{1}{b_n}\right| = \frac{1}{b_n} < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\lim \frac{1}{b_n} = 0}$$

(3) Übung.