$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\lim \frac{1}{b_n} = 0}$$

(3) Übung.

Beispiel - (1) $\left(a_n \longrightarrow 0\right) \not\Longrightarrow \frac{1}{a_n} \longrightarrow +\infty$

z.B. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\left[-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right]$
$n \geq 1$

aber $\frac{1}{a_n} = (-1)^n n$, konvergiert nicht gegen $+\infty$ oder $-\infty$

(2) Seien $p(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_0$ $(a_d \neq 0)$

$q(X) = b_c X^c + \dots + b_0$ $(b_c \neq 0)$

$\lim_{n \to \infty} \frac{p(n)}{q(n)}$?

[__Bem.__ für n gross genug ist $q(n) \neq 0$]

__Falls__: (1) $\underline{\underline{d > c}}$: $\lim \frac{p(n)}{q(n)} = +\infty$ oder $-\infty$

wo $+\infty$ gilt genau dann wenn

$$\frac{ad}{bc} > 0$$

$-\infty$ ———————————

$$\frac{ad}{bc} < 0$$

[z. B. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+1}{2n^2-12n+5} = +\infty$]

(2) $d = c$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{ad}{bc} = \frac{ad}{bd} \quad (\neq 0)$

[z. B $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^4}{\frac{1}{2}n^4 - 100} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$]

96

(3) $\underline{\underline{d < c}}$: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{p(n)}{q(n)} = 0$

[$\underline{z.B.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^4}{\frac{1}{10}n^6 - n^5 + 4} = 0$]

Beweis:

$$\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{n^d\left(a_d + \frac{a_{d-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^d}\right)}{n^c\left(b_c + \frac{b_{c-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^c}\right)}$$

$$= n^{d-c} \boxed{\frac{a_d + \overset{\to 0}{\frac{a_{d-1}}{n}} + \dots + \overset{\to 0}{\frac{a_0}{n^d}}}{b_c + \dots + \underset{\to 0}{\frac{b_0}{n^c}}}}$$

d.h. $\frac{p(n)}{q(n)} = n^{d-c}\, u_n$

wo $u_n \longrightarrow \frac{ad}{bc} \neq 0$

<u>So:</u> für $d > c$, $\frac{p(n)}{q(n)} = \underbrace{n^{d-c}}_{\to +\infty} \, u_n$

$\longrightarrow \begin{cases} +\infty \\ \text{oder} \\ -\infty \end{cases}$

u_n entweder > 0 oder < 0

n gross genug

beschränkt

wo $+\infty$ gilt für $\frac{ad}{bc} > 0$.

für $\underline{d = c}$: $\frac{p(n)}{q(n)} = u_n \longrightarrow \frac{a_d}{b_d}$

$\underline{d < c}$: $\frac{p(n)}{q(n)} = \frac{u_n}{n^{c-d}} \xrightarrow{\text{(Satz (2))}} 0$

$c-d > 0$

d.h. $n^{c-d} \longrightarrow +\infty$

2.7 – Reihen

Folgen sind oft mit

$$\begin{cases} a_0 = x_0 \\ a_{n+1} = a_n + x_{n+1} \end{cases}$$

definiert, wo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegebene Folge ist. D.h.

$$a_n = x_0 + \dots + x_n, \quad n \geq 0$$

(oder $a_n = x_1 + \dots + x_n, \quad n \geq 1$)

Beispiel –

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n},$$

$$a_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Def. Die Folge (a_n), wo

$$a_n = x_0 + \dots + x_n,$$

ist die Folge der partielle Summen der Reihe mit Gliedern $(x_n)_{n\geq 0}$, bezeichnet $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n}$

(Nur!) Wenn die Folge (a_n) konvergiert, ist der Grenzwert die Summe der Reihe:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Beispiele.

(1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergiert (in $\mathbb{R}$), aber

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

(2) Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, und

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(3) Falls $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$, ist

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}}.$$

Bemerkung:

(1) Jede Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist auch die Folge der partielle Summen einer (einzige) Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$:

[Frage: gibt es (x_n) sodass $a_n = x_0 + \dots + x_n$?]

$$\begin{cases} x_0 = a_0 \\ x_{n+1} = a_{n+1} - a_n, & n \geq 0 \end{cases}$$

[weil dann ist

$$x_0 + \dots + x_n$$
$$= \cancel{a_0} + (\cancel{a_1} - \cancel{a_0}) + (a_2 - \cancel{a_1}) + \dots + (a_n - \cancel{a_{n-1}})$$
$$= a_n \;]$$

(2) Sei $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ eine konvergente Reihe ~~in $\mathbb{R}$ oder~~, mit partielle Summen

nicht gegen $+/- \infty$

$$a_n = x_0 + \cdots + x_n .$$

Dann folgt

$$x_n = a_n - a_{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \qquad\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

z.B. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ konvergiert nicht

Aber: dass $x_n \longrightarrow 0$ impliziert **nicht** (in der Regel) dass $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ konvergiert (als **Zahl**).

Beispiel: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$: $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$

aber

die Reihe konvergiert **nicht**.

Intuition: $\sum x_n$ konvergiert wenn (x_n) konvergiert "schnell genug" gegen 0.

__Satz.__ (2.7.4, 2.7.5, 2.7.6)

Seien $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ Folgen komplexer Zahlen.

(1) $$\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

falls $\sum x_n$, $\sum y_n$ konvergieren.

[für das Produkt: siehe später]

(2) $$\sum_{n=0}^{+\infty} (x x_n) = x \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

falls $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{C} \\ \sum x_n \text{ konvergiert.} \end{array} \right.$

(3) [Cauchy Kriterium]

$\sum x_n$ konvergiert $\iff$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall m \geq n \geq N,$

$$\underbrace{\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right|}_{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_m} < \varepsilon$$

(4) Sei $x_n \geq 0$, die Reihe $\sum x_n$ konvergiert (gegen eine Zahl) $\iff \exists C \in \mathbb{R},$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq x_0 + \dots + x_n \leq C$

Beweis (1) + (2) : Übung

(3) Seien $a_n = x_0 + \dots + x_n$ die partielle Summen; die Reihe $\sum x_n$ konv. (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) $\overset{[C-K]}{\iff}$ (a_n) erfüllt

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \ \forall m \geq N, \ (\text{mit } m \geq n) \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq n \geq N, \ |x_m + x_{m-1} + \dots + x_{n+1}| < \varepsilon$$

Falls $n < m$, $\sum_{k=m}^{n} x_k = 0$

(4) Sei $a_n = x_0 + \cdots + x_n$, $x_n \geq 0$

dann ist $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n.

D. h. (a_n) ist monoton wachsend:

sie konvergiert $\Leftrightarrow$ sie ist von oben beschränkt.

$\square$

Beispiele – (1) Falls $\sum y_n$ konvergiert, und $|x_n| \leq y_n$, ist $\sum x_n$ konvergent.

Warum? Wir benutzen das Cauchy-Kriterium.

D.h. wir versuchen

$$\sum_{k=n+1}^{m} x_k$$

abzuschätzen für $m \geq n$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} y_k}$$

Dreiecksungl.

Weil $\sum y_n$ konvergiert, gibt es [C-K] für jede $\varepsilon > 0$, ein $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$0 \leq y_{n+1} + \dots + y_m < \varepsilon$$

für $m \geq n \geq N$, und dann ist auch

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\sum x_n$ konv. wegen das Cauchy Kriterium

<u>z. B.</u> Falls $|x_n| \leq q^n$ wo $0 \leq q < 1$

ist $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ konvergent.

(Weil $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$)

z.B. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos\left((n!+1)\sqrt{2} - \sin(n^3+1)\right)$

konvergiert

Def. (2.7.9). Sei (x_n) eine komplexe Folge. Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ konvergiert absolut falls $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ konvergiert.

z.B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert nicht absolut.

(2.7.10)

Satz: Jede Reihe $\sum x_n$ die absolut konvergent ist, **konvergiert** (gegen eine Zahl)

und

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right| \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|}_{\text{gehört } \mathbb{R}}.$$

(weil $\sum x_n$ konv. absolut)

Beweis: Beispiel (1), Seite 109:

(Cauchy Kriterium) mit

$x_n \longleftrightarrow x_n$

$y_n \longleftrightarrow |x_n|$

$\forall n: \quad \underset{|x_n|}{\overset{\|}{|x_n|}} \leq \underset{|x_n|}{\overset{\|}{y_n}}$, und "$\sum y_n$ konvergiert" bedeutet dass $\sum x_n$ konvergiert absolut.

$\Rightarrow \sum x_n$ konvergiert falls sie ist abs. konv.

Dreiecksungleichung: für $n \geq 0$

$$|x_0 + \dots + x_n| \leq |x_0| + \dots + |x_n|$$

$\underline{n \to \infty}$:

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$$

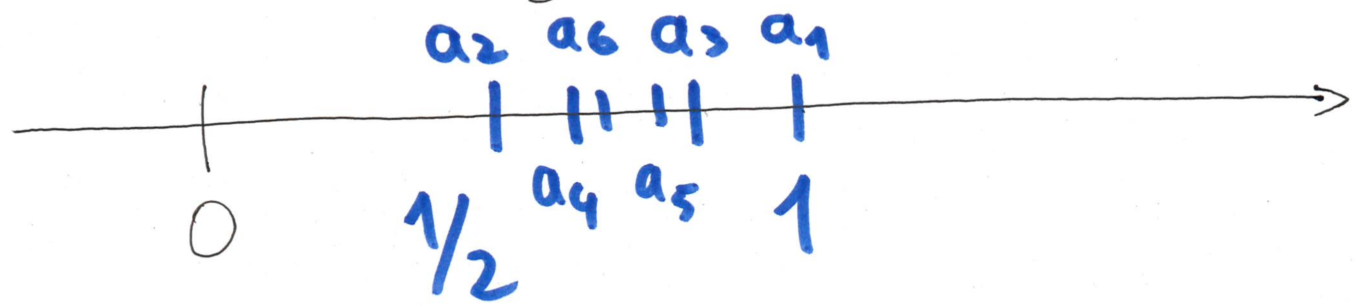
__Beispiele__. (1) Falls $|q| < 1$, $q \in \mathbb{C}$, ist $\sum q^n$ konv. abs. (weil $|q^n| = |q|^n$)

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert absolut.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = +1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

konvergiert nicht absolut, __aber__ sie konvergiert.

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$



$$\left(a_3 = 1/2 + \frac{1}{3}\right)$$

Man sieht dass:

$\forall n,\quad a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$

d.h. (a_{2n}) ist wachsend, beschränkt

(a_{2n+1}) —— fallend, ——

$\Rightarrow \begin{cases} (a_{2n}) \text{ konvergiert gegen eine Zahl } \ell \\ (a_{2n+1}) \text{ —————— } \ell' \end{cases}$

und $\quad \left| a_{2n} - a_{2n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \right|$

$(n\to\infty) \quad a_{2n} \to \ell, \quad a_{2n+1} \to \ell' \qquad = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

sodass $\quad \ell = \ell'$.

$\Longrightarrow \quad (a_n)$ konvergiert gegen $\ell = \ell'$.

D. h. $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergiert, nicht absolut.

(Bem. man kann zeigen, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log(2)$)

Satz. (2.7.12)

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ fallend, $a_n \geq 0$, $a_n \to 0$.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ ist dann konvergent (gegen eine Zahl)

(**Beispiel**: $a_n = \frac{1}{n+1}$: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$)

Vorsicht! Eine Reihe die nicht absolut konv. ist (aber konvergent) kann man nicht umordnen wie man will!

$$(\log(2) =) S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

$$\text{"="} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8}$$

$$\vdots$$

$$+ \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}\right) - \frac{1}{4k+4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}$$

$$+ \dots + \frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)$$

$S = \frac{1}{2} S$, aber $\log(2) \neq 0$

??