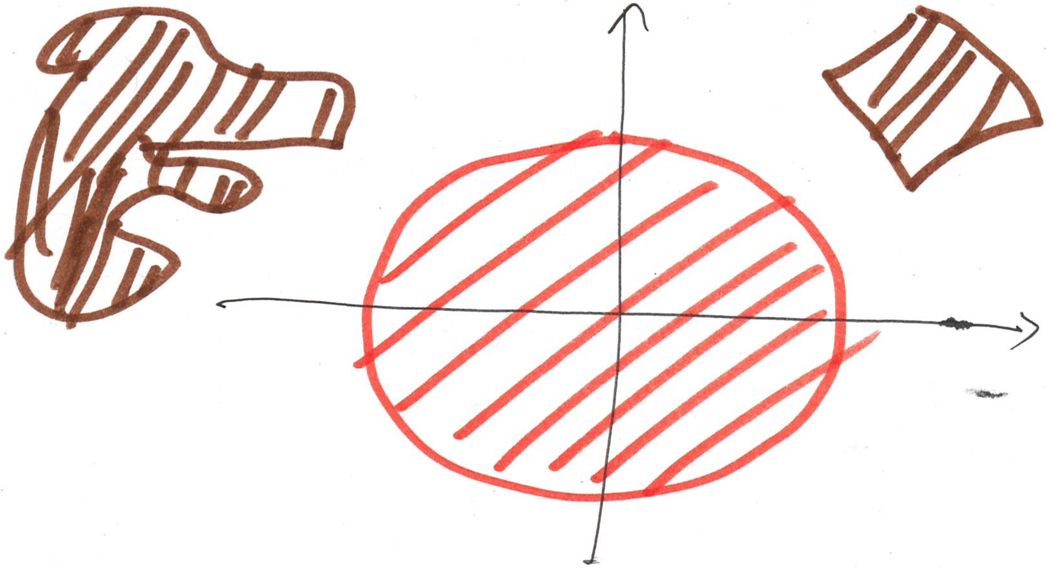
Kapitel V

Integralrechnung

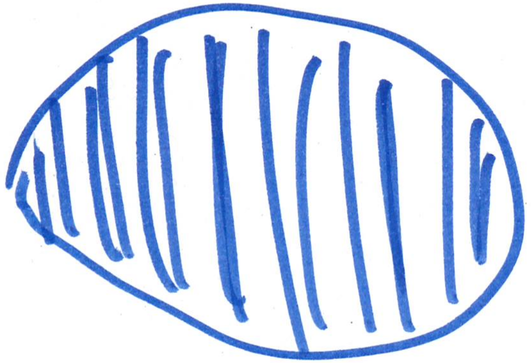
<u>Motivationen</u>:

1) <u>Geometrie</u>: Frage der Berechnung dem Flächeninhalt einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^2$



Flächeninhalt?

Wie können wir den Flächeninhalt genau definieren?



Dies braucht die Integralrechnung!

2) Welche Funktionen sind Ableitung einer andere Funktion?

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$

Die Funktion $\log(x)$ hat Ableitung f, f ist "algebraisch", aber $\log$ ist nicht.

Wir suchen eine Methode, um eine Funktion mit gegebene Ableitung zu finden.

(Nicht einfach:
für $f(x) = \exp(x^2)$, es gibt
g mit $g' = f$, aber sie ist
<u>sehr</u> kompliziert).

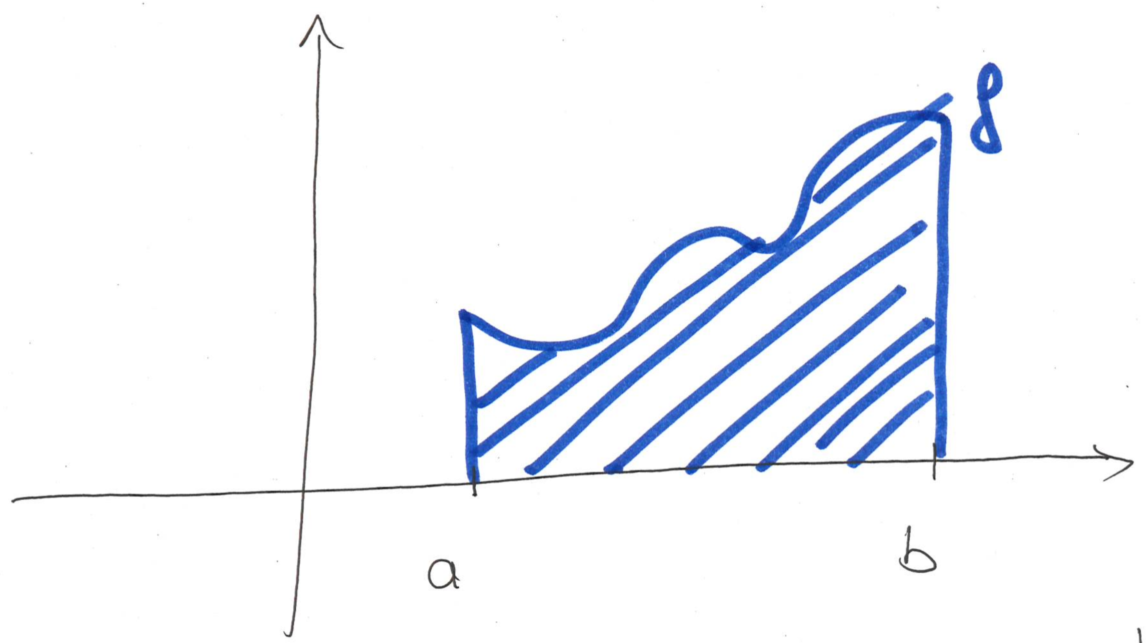
3) <u>Wahrscheinlichkeit Theorie</u>:

die Wahscheinlichkeit
das eine "zufällig gewählt"
Zahl $x \in [0,1]$ eine gegebene Eig.
hat, ist durch Integralrechnung definiert

1 – Definition

(F.J.)

Wir wollen den Flächeninhalt definieren für Mengen der Form:



$a < b$

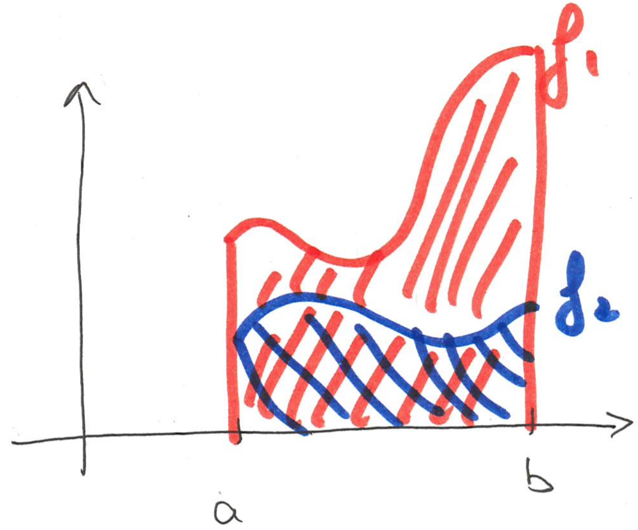
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

mit

$f(x) \geq 0$

und $X_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{array} \right\}$

Wir benutzen 3 "klare" Eigenschaften von F.I.:



(1) Für $f_1 \geq f_2$, ist

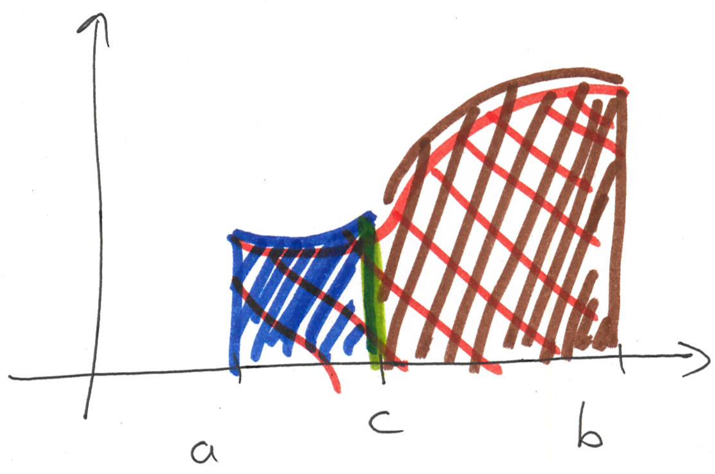
$$F.I.(f_1) \geq F.I.(f_2)$$

(2) Sei $a < c < b$,

$f_1 = f$ auf $[a, c]$

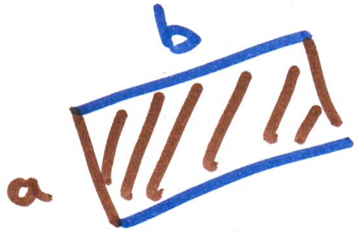
$f_2 = f$ auf $[c, b]$

$$FI(f_1) + FI(f_2) = FI(f)$$

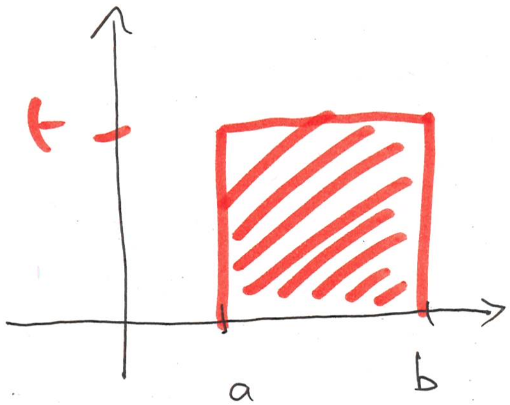


$a < c < b$

(3) <u>Rechtecken:</u>



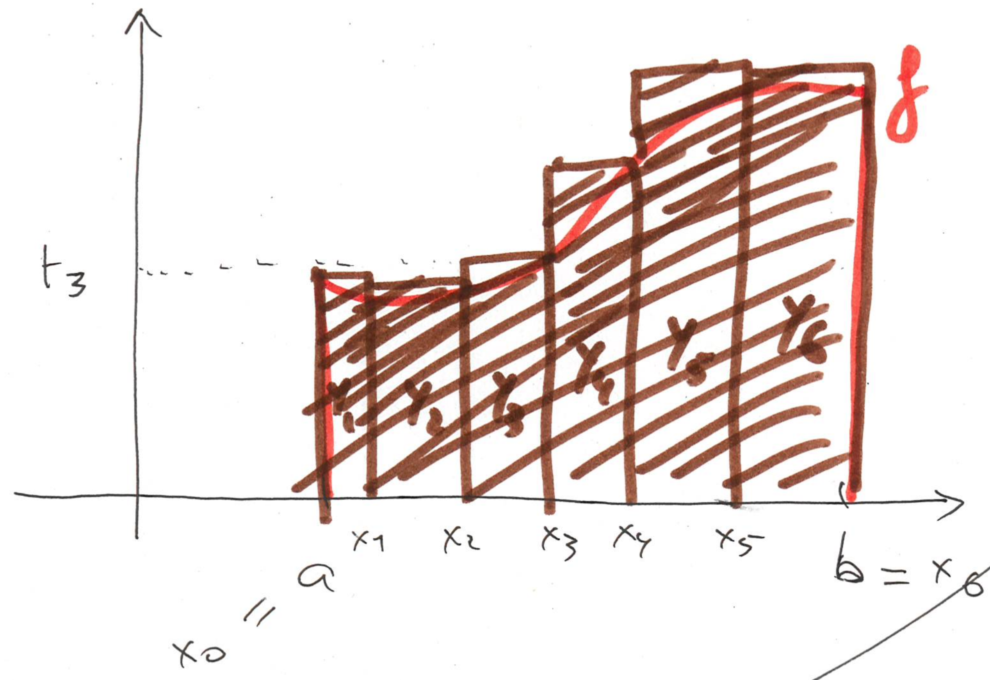
→ Flächeninhalt ist $a \cdot b$



$f(x) = t$ für alle $x \in [a, b]$

$\Rightarrow FI(X_f) = t\,(b - a)$

Wie benutzen wir diese 3 Eigenschaften um $FI(X_f)$ zu definieren?



$$FI(X_f) \leq FI(Y_1) + \dots + FI(Y_6)$$

definiert durch (3)

(1) + (2)

D.h.: (1) wir nehmen $n \geq 1$, und Zahlen

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

(2) wir finden Zahlen

r_i und s_i, $i = 0, \dots, n-1$

sodass

$$r_i \leq f(x) \leq s_i \,, \qquad x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

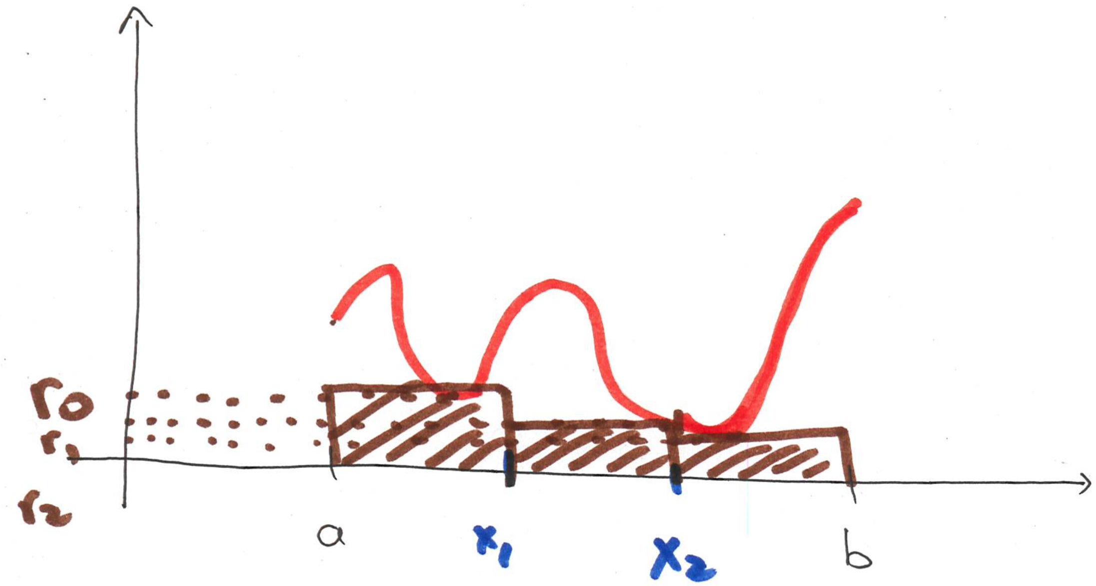
(3) wir bilden

$$K = \sum_{i=0}^{n-1} r_i (x_{i+1} - x_i)$$

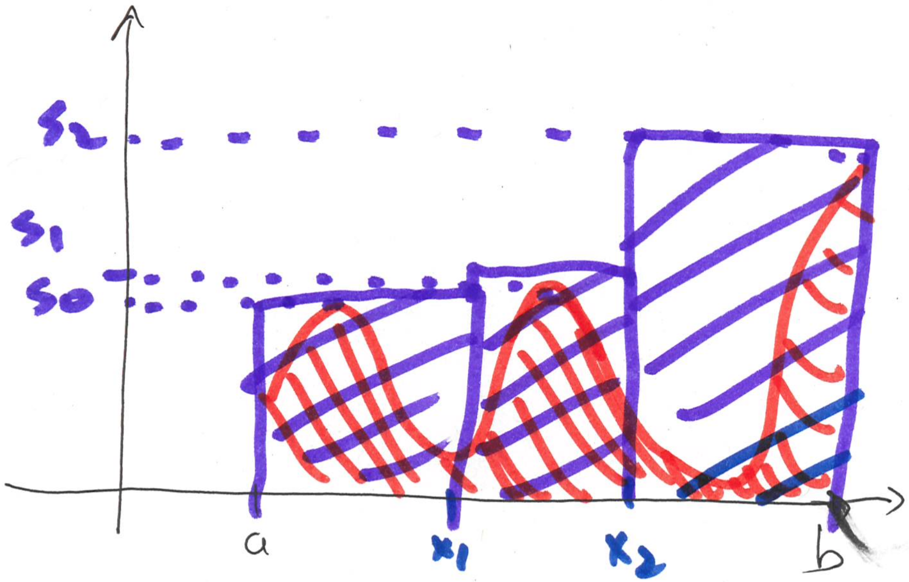
$$G = \sum_{i=0}^{n-1} s_i (x_{i+1} - x_i)$$

und dann gilt

$$K \leq FI(X_f) \leq G$$



$$K = (x_1 - a)\,r_0 + (x_2 - x_1)\,r_1 + (b - x_2)\,r_2 = FI(\;)$$



$$G = FI(\;)$$

$$K \le FI(\;) \le G$$

Definition (5.1.3) $a < b$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

heisst **integrierbar** (im Sinne von Riemann)

falls

(1) f ist auf $[a,b]$ beschränkt

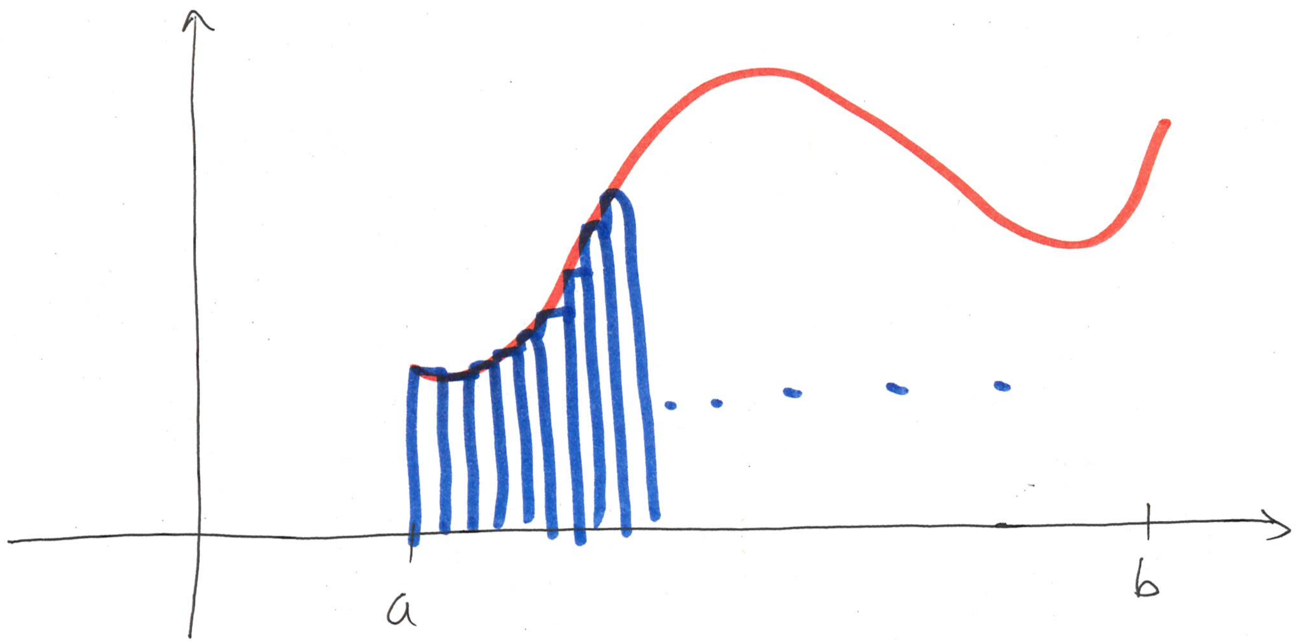
(d.h. $\exists\, M_1, M_2$, $M_1 \leq f(x) \leq M_2$)

(2) Sup (alle "kleinere" Summen K) = Inf (alle grösse Summen G)

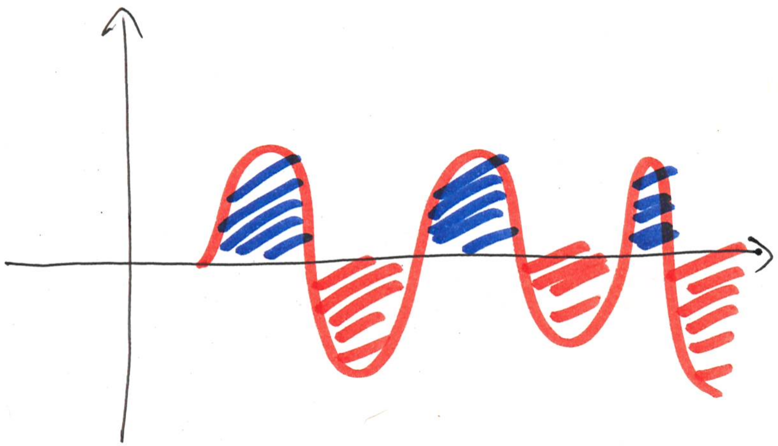
wo wir überlegen alle $n \geq 1$, und alle "Partitionen" $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Dann sagt man dass diese Zahl ist das Integral von f auf $[a,b]$, bezeichnet

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$



<u>Bemerkung</u>: das $f(x) \geq 0$ ist in diese Definition <u>nicht</u> inbegriffen!

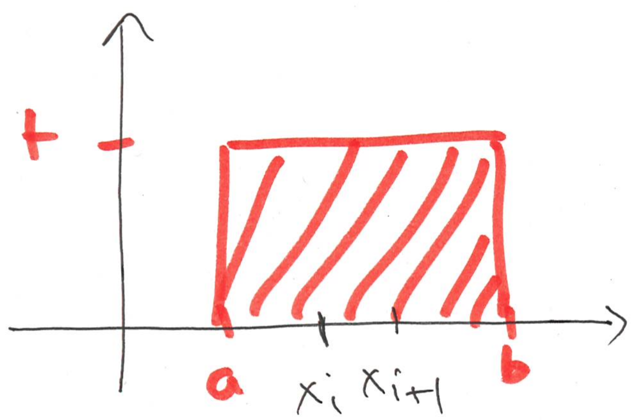


Aber dann hat das Integral keine Interpretation als Flächeninhalt.

(In diesem Fall
$$\int_a^b f(x)\,dx = FI(///) - FI(////)$$
)

Beispiele: Sei

(1) $f(x) = t$, $a \le x \le b$



Auf jede Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$

ist $\begin{cases} \operatorname{Inf}\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) = t = s_i \\ \operatorname{Sup}\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x) = t = s_i \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad K = \sum_{i=0}^{n-1} t \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

$$= t\,(\cancel{x_1} - x_0 + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{\cdots} + x_n - \cancel{x_{n-1}})$$

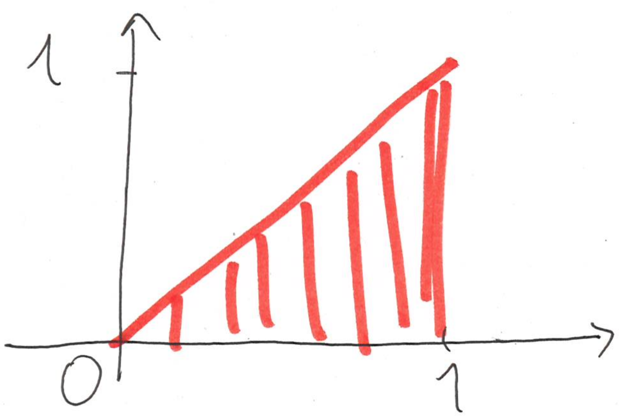
$$= t\,(x_n - x_0) = t\,(b-a)$$

Ähnlicherweise : $G = t\,(b-a)$

$\Longrightarrow$ f ist integrierbar und

$$\int_a^b t\,dx = t\,(b-a)$$

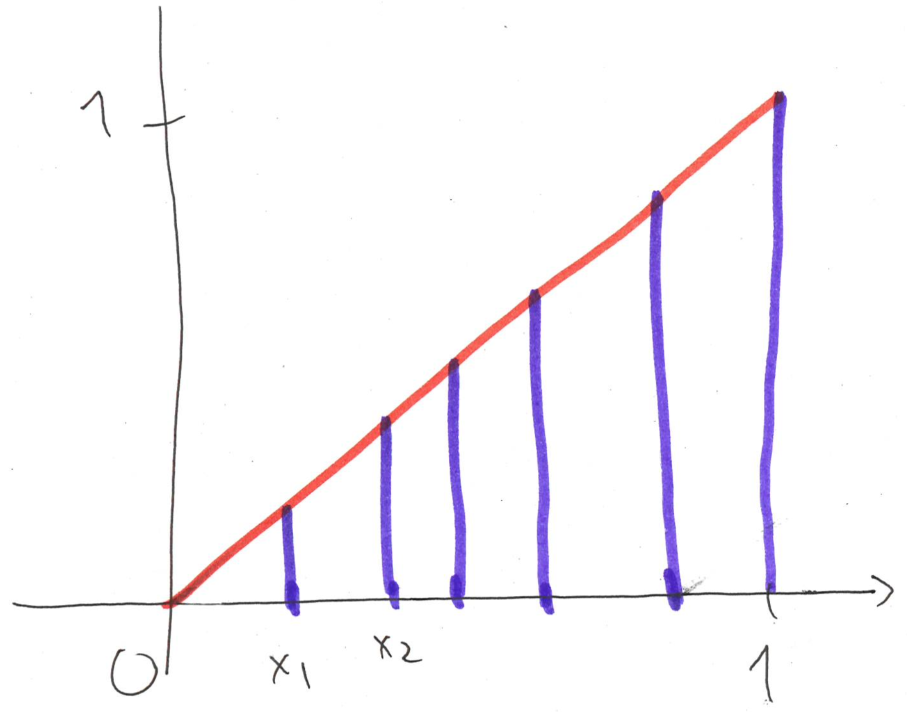
(2) $f(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$



Geometrisch ist es klar

das $FI(X_f) = \frac{1}{2}$

(ein Halb von $[0,1] \times [0,1]$)



Auf $[x_i, x_{i+1}]$,

ist

$$\begin{array}{ccccc} x_i & \le & f(x) & \le & x_{i+1} \\ \parallel & & & & \parallel \\ r_i & & & & s_i \end{array}$$

$$K = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \left(x_{i+1} - x_i \right)$$

$$G = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \left(x_{i+1} - x_i \right)$$

Wir überlegen die Verteilung mit

$$x_i = \frac{i}{n}, \quad 0 \le i \le n$$

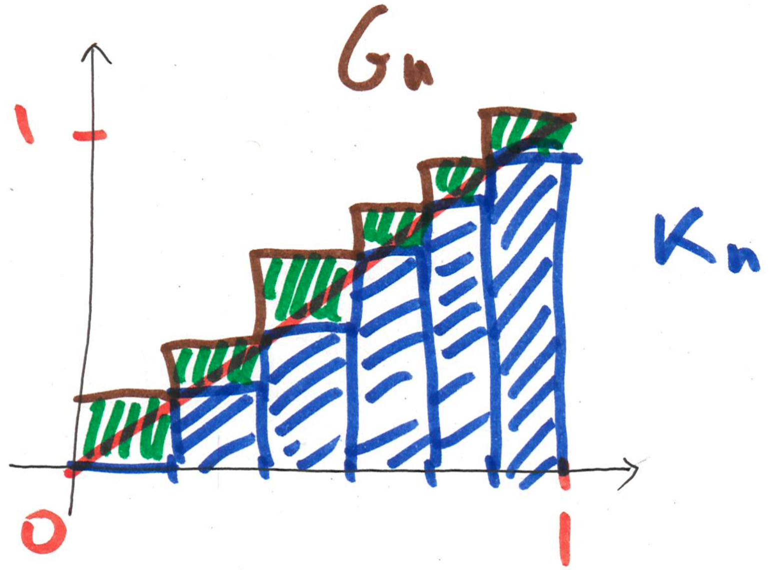
$$K_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \overbrace{\frac{1}{n}}^{(x_{i+1} - x_i)} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$G_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} (x_{i+1} - x_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} i + n \right)$$

$$= K_n + \frac{1}{n}$$



$$= \frac{1}{n}$$

Sup (Kleine Summen) $\geq \mathrm{Sup}\ K_n$

Inf (Grosse Summen) $\leq \mathrm{Inf}\ G_n$

Aber $$K_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i \underbrace{=}_{\text{(Induktion)}} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{n^2}{2n^2} - \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$G_n = K_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Es gilt $\frac{1}{2} = \lim K_n = \lim G_n$

Für eine beliebige Verteilung kann man überprüfen dass

$K \leq$ alle grosse Summen für alle andere Verteilungen

(weil K ist F.I für eine Teilmenge von Teilmengen mit F.I jede G)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{Sup} K = \operatorname{Inf} G = \frac{1}{2}}$$

D. h. $f(x) = x$ ist auf $[0, 1]$ integrierbar

mit $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

(3) (Dirichlet) $a = 0, \quad b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

In jedes Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, $x_i < x_{i+1}$

es gibt mindestens eine rationale Zahl und auch

eine nicht-rationale Zahl

("$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$")

$\Rightarrow \quad \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = 0 , \quad \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = 1$

$\Rightarrow \quad K = 0 , \quad G = 1$

$\Rightarrow$ f ist <u>nicht</u> integrierbar

[<u>Bemerkung:</u> ~~kann~~ es gibt eine andere Def. von Integrierbarkeit (Lebesgue), und für diese ist f ~~ist~~ integrierbar, mit Integral $= 1$]

(<u>Bemerkung:</u> für $A \subset [0,1]$, falls die Funktion

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

integrierbar ist, ist das Integral die "Wahrscheinlichkeit das eine Zahl $x \in [0,1]$ gehört A".)

5.2. Integrierbare Funktionen

Satz (5.2.1). Falls $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sind, dann sind

$$\left\{ \begin{array}{l} f+g \\ f \cdot g \\ |f| \\ \max(f,g) \\ \min(f,g) \end{array} \right.$$

(x ist auf $\max(f(x), g(x))$ abgebildet)

sind auch integrierbar.

Falls $\exists\, c>0$, $|g(x)| \geq c$, ist f/g integrierbar.

Beweis: siehe Skript

Was wir benutzen werden ist

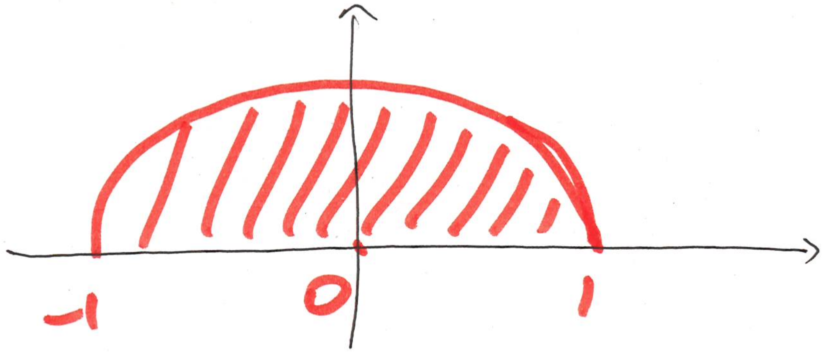
Satz (5.2.~~8~~7) – Jede $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die <u>stetig</u> ist, ist integrierbar.

($\Rightarrow$ F.I (X_f) ist definiert, als $\int_a^b f(x)\,dx$ wenn $f \geq 0$ auf $[a,b]$)

z.B. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

existiert; sie ist den Flächeninhalt für einen Halbkreis mit Radius 1



Wir erwarten

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

<u>Idee dem Beweis.</u> Wir brauchen eine zusätzliche Eigenschaft von stetige Funktionen auf <u>kompakte</u> Intervalle.

Satz (5.2.6) f ist **gleichmässig** stetig, d.h.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon} > 0, \forall x \; \forall y$ (in $[a,b]$), $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

(vergleich mit:

$\forall x \in [a,b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in [a,b],$
$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

d.h. für f gleichmässig stetig, hängt δ nicht von x ab!)