Wie benutzt man diese Eigenschaft?

Wir nehmen $\varepsilon > 0$, wählen $\delta > 0$ sodass

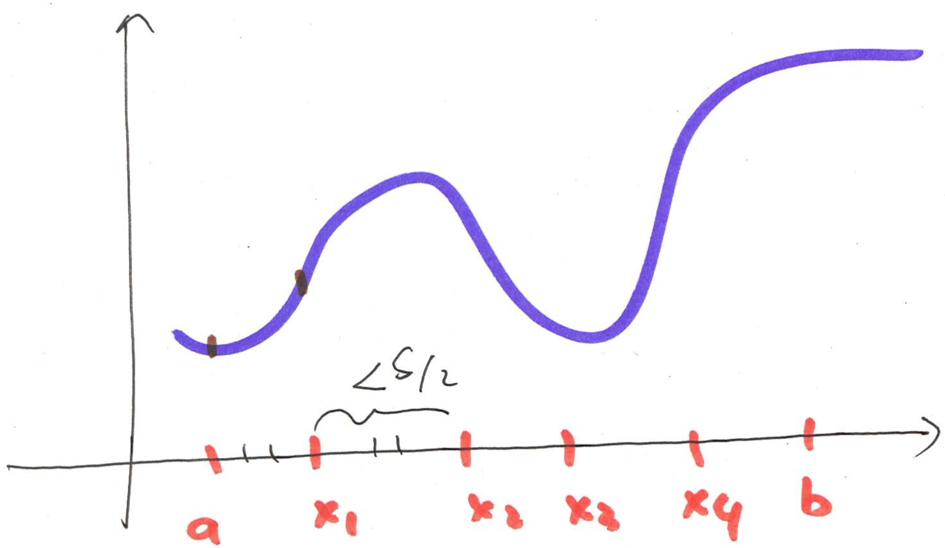
$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Sei $n \geq 1$ und

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

sodass

$|x_{i+1} - x_i| < \delta$ für alle i



$\implies$ für alle i, gilt

$$\underbrace{\sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)}_{s_i} - \underbrace{\inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x)}_{r_i} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} s_i (x_{i+1} - x_i)}_{G} - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} r_i (x_{i+1} - x_i)}_{K} \leq \varepsilon (b-a)$$

$$G - K \leq \varepsilon (b-a)$$

<u>So</u>: für "dicht genug" Verteilungen (wo $\max |x_{i+1} - x_i| < \delta$), sind G und K "fast gleich".

$\Rightarrow$ dies impliziert, das f integrierbar ist.

Beweis von gleich. Stetigkeit:

Durch Widerspruch: falls f **nicht** gleichm. stetig ist:

$\exists \, \varepsilon > 0, \ \forall n \geq 1, \ \exists \ x_n, y_n$ in $[a,b]$,

mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$

und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Bolzano - Weierstrass:

es gibt eine konv. Teilfolge: $u_k = x_{t(k)}$ von (x_n)

und $u_k \longrightarrow z$, $\boxed{z \in [a,b]}$

Von $\quad |x_{t(k)} - y_{t(k)}| < \frac{1}{t(k)}$

$$\Longrightarrow \quad y_{t(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} z$$

Von <u>Stetigkeit</u> von f:

$$\begin{cases} f(x_{t(k)}) \longrightarrow f(z) \\ f(y_{t(k)}) \longrightarrow f(z) \end{cases}$$

so dass $\quad \underbrace{|f(x_{t(k)}) - f(y_{t(k)})|}_{\geq \varepsilon > 0} \longrightarrow 0$

Notation: $\int_a^b f(x)\,dx$ ist definiert

für $a < b$.

Wir definieren:

$$\begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{wenn } a > b & [\text{z.B. } \int_1^0 x\,dx = -\tfrac{1}{2}] \\ \int_a^a f(x)\,dx = 0 \end{cases}$$

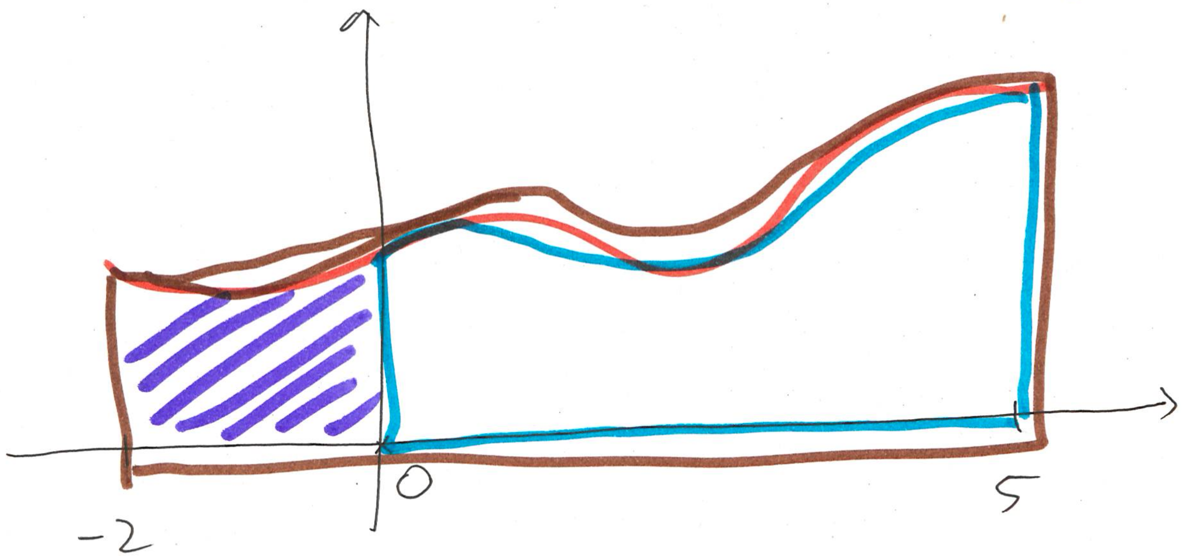
Es folgt: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$

für alle a, b, c

z. B.

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^5 f(x)\,dx$$

$$\Big(\underbrace{\int_0^5 f(x)\,dx}_{= \text{FI}} = - \underbrace{\int_{-2}^0 f(x)\,dx}_{= \text{FI}} + \underbrace{\int_{-2}^5 f(x)\,dx}_{= \text{FI}} \Big)$$



Satz (5.2.10) [Linearität des Integrals]

Für $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integrierbar,

s, t in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $sf + tg$ ist integrierbar

und

$$\int_a^b (sf(x) + tg(x))\,dx = s\int_a^b f(x)\,dx + t\int_a^b g(x)\,dx.$$

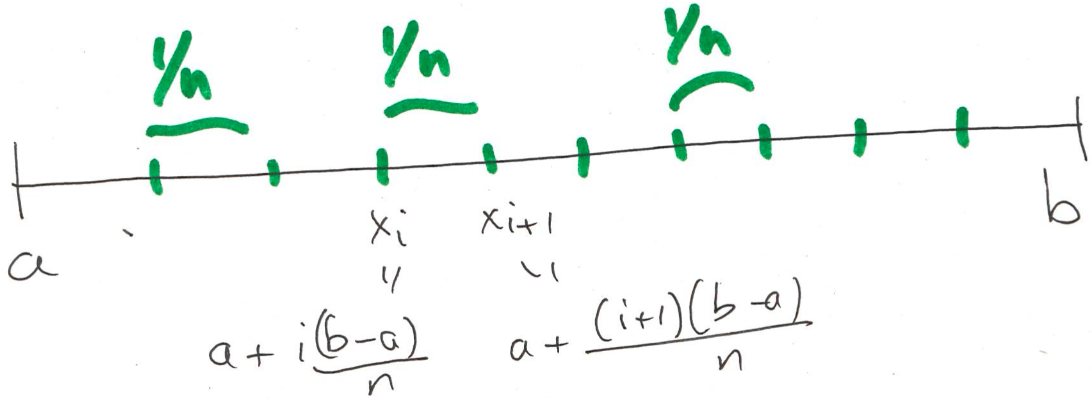
Bemerkung: es gibt **keine** einfache Formel für $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$!!

(Insbesondere : $\int_a^b fg \neq \left(\int_a^b f\right) \cdot \left(\int_a^b g\right)$!)

<u>Bemerkung</u>: Man kann zeigen dass für f stetig, das Integral ist den Grenzwert der Folge der <u>Riemannsche Summen</u>:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)$$

$(n \geq 1)$



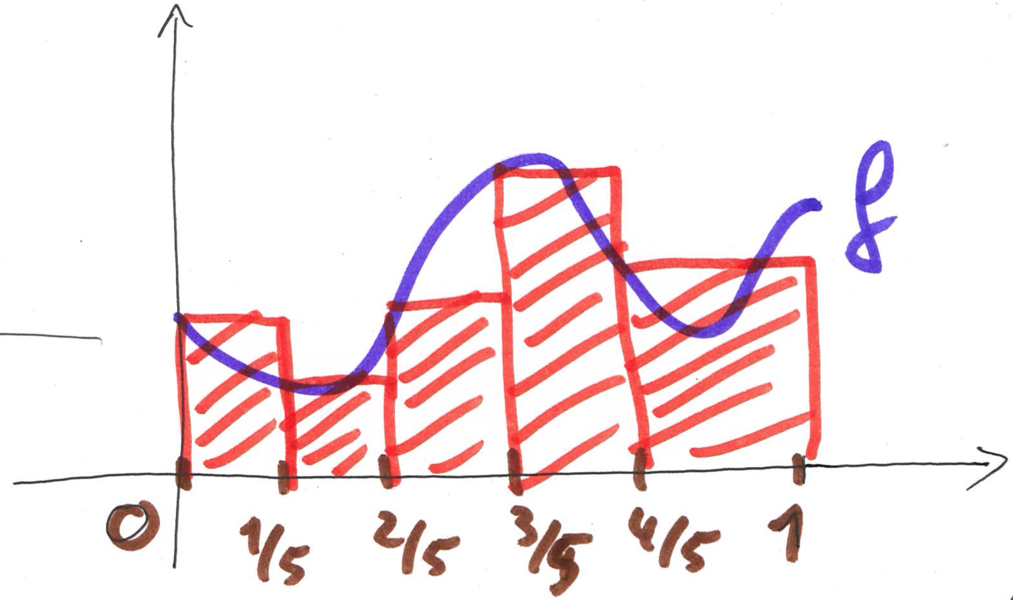
Man beweist :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx}$$

(z.B. $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \longrightarrow \int_0^1 x^2\,dx$)

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

$S_5 = \mathrm{FI}(\ )$



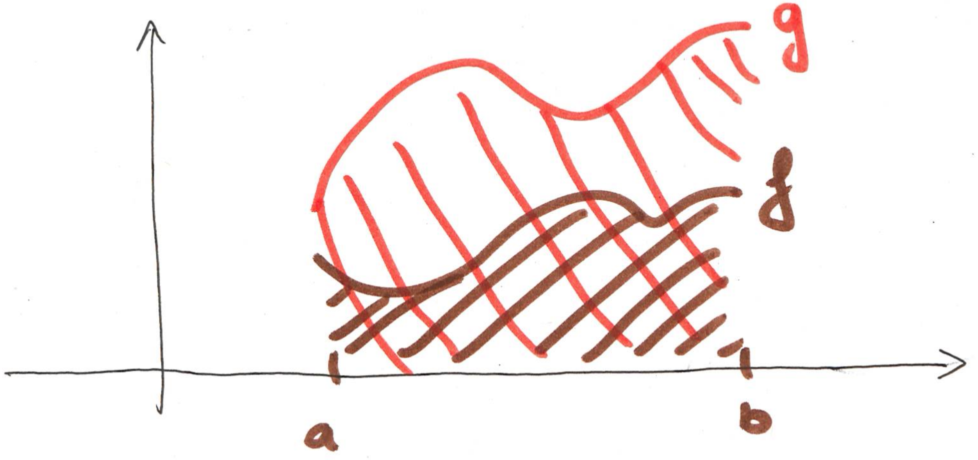
5.3. Dreiecksungleichung

Satz. (5.3.1)

Falls $f(x) \leq g(x)$ auf $[a,b]$

und f, g integrierbar auf $[a,b]$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$



$\mathrm{FI}(\;)$

$\geq \mathrm{FI}(\;)$

(Weil $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{Linearität}}{=} \int_a^b \underbrace{(g(x) - f(x))}_{\geq 0}\,dx$

und für ≥ 0 Funktionen sind alle Summen K, G nicht negativ, sodass $\int_a^b (g-f)$ ist auch ≥ 0.)

<u>Kor.</u> (Dreiecksungleichung für Integrale)

f integrierbar auf $[a,b]$

$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

(Weil $\quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad \forall x$

Satz 5.3.1 $\Longrightarrow$ (zweimal) $\quad \int_a^b (-|f(x)|)dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

$\Longleftrightarrow \quad -\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

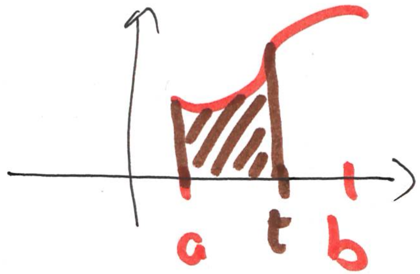
$\Longrightarrow \quad \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$)

5.4. Der Fundamentalsatz der Integralrechnung

Satz. (5.4.1)

Seien $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir definieren

$$S : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$



durch

$$S(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

(1) S ist auf $[a,b]$ differenzierbar

(2) $S'(t) = f(t)$ für $t \in [a,b]$.

<u>Kor.</u> (5.4.2)

Falls f stetig differenzierbar auf $[a,b]$, ist

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

(auch wenn $a > b$ oder $a = b$)

<u>z. B.</u>

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' dx$$

$$= \left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

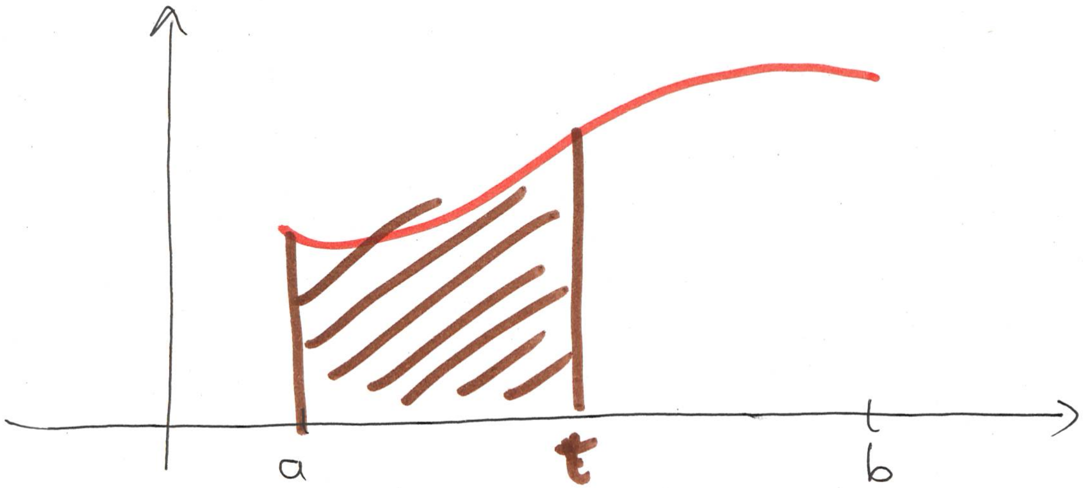
oder

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad \text{für alle } a, b.$$

__Def.__ Falls $g' = f$, ist g eine __Stammfunktion__ von f.

(z. B. $\frac{x^2}{2}$ ist Stammfunktion von x)

__Idee für den Beweis__: wir nehmen an, $f(x) \geq 0$: $S(t) = FI($ ▨ $)$



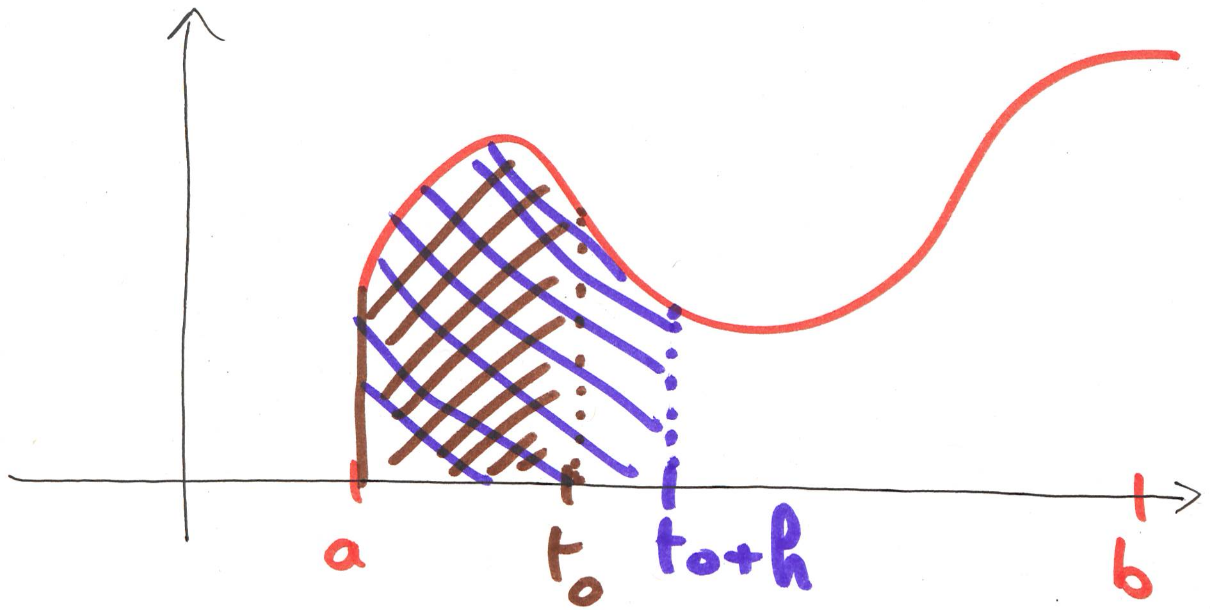
Sei $t_0 \in \,]a, b[$

Wir sollen

$$\frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h}$$

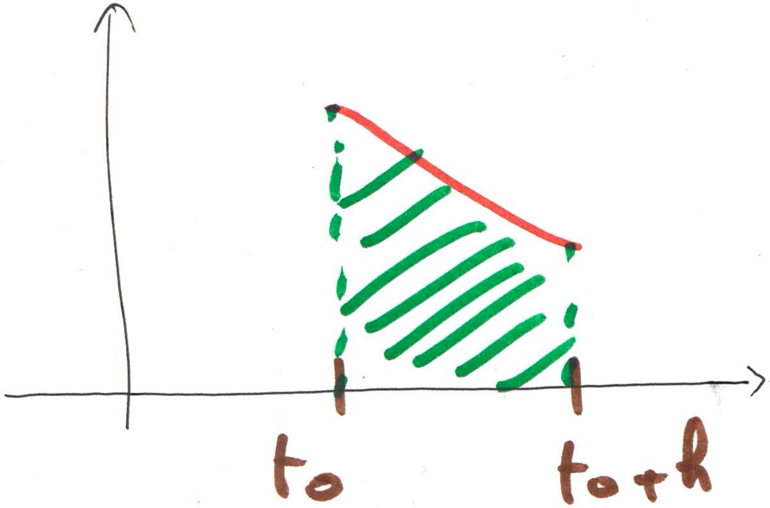
für $h \to 0$ überlegen.

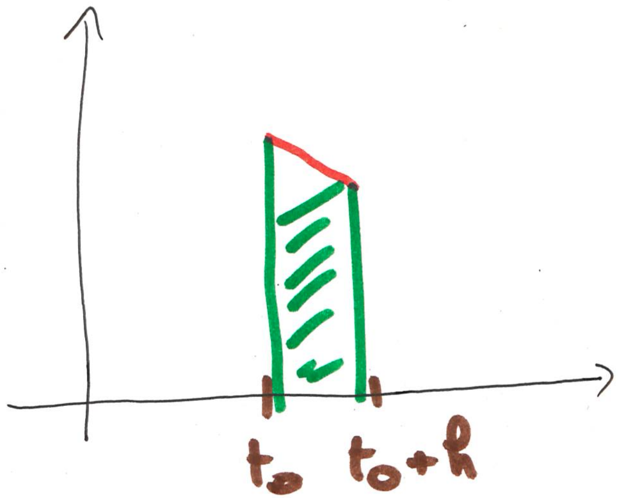
Wir überlegen $h > 0$.



$$S(t_0 + h) - S(t_0) = \int_a^{t_0+h} f(x)\,dx - \int_a^{t_0} f(x)\,dx$$

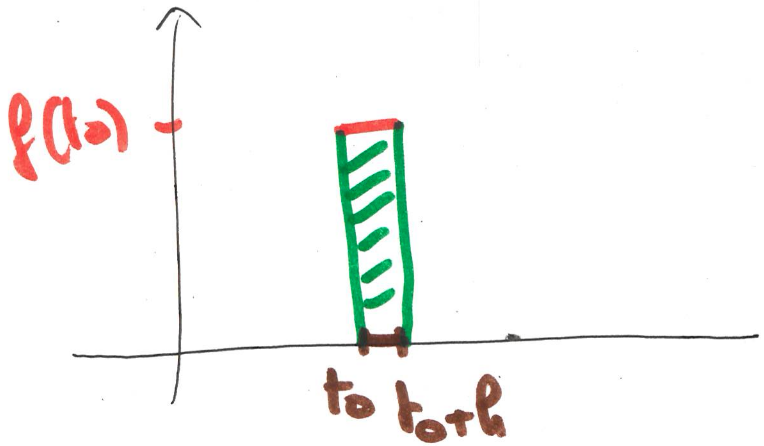
$$= \int_{t_0}^{t_0+h} f(x)\,dx.$$





Für $h>0$ <u>sehr klein</u> (wegen die Stetigkeit von f)

ist das Bild wie ein Rechteck:



$$S(t_0+h) - S(t_0) \approx h \cdot f(t_0)$$

ist ungefähr

$$\Longrightarrow \quad \frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h} \approx f(t_0)$$

d.h. $$\lim_{h \to 0} \frac{S(t_0+h) - S(t_0)}{h} = f(t_0)$$

$\Longleftrightarrow$ $S'(t_0)$ existiert, ist $= f(t_0)$

Für das Korollar: wir bemerken zuerst

<u>Hilfsatz.</u> Falls g ist Stammfunktion von f, dann ist $g+c$ auch Stammfunktion für jede $c \in \mathbb{R}$; alle Stammfunktionen haben diesen Form; und für alle $x_0 \in [a,b]$ und $y_0 \in \mathbb{R}$, es gibt genau eine Stammfunktion g mit $g(x_0) = y_0$.

(z.B. eindeutig Stammfunktion mit $g(a)=0$).

Beweis. ~~Seien~~ $(g + c)' = g' + c'$

$= g' + 0 = g' = f$

so $g+c$ ist eine Stammfunktion.

Weiter falls g_1, g_2 Stammfunktionen von f sind, gilt

$$(g_1 - g_2)' = g_1' - g_2' = f - f = 0.$$

$\Rightarrow$ es gibt $c \in \mathbb{R}$ sodass

$\forall x, \; g_1(x) - g_2(x) = c.$

~~[weil für $x < y$, es gibt ξ mit $(g_1-g_2)(x) - (g_1-g_2)(y)$~~

46

(weil falls eine Funktion F Ableitung 0 hat, ist sie konstant:

$$\forall x < y \quad \frac{F(x) - F(y)}{x - y} = F'(\xi) = 0 \quad)$$

Falls g Stammfunktion ist, mit

$$g(x_0) = y$$

ist $g_1 = g + (y_0 - y)$ eine Stammfunktion

mit

$$\boxed{g_1(x_0) = g(x_0) + y_0 - y = y}$$

Beweis von Kor:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = ?$$

Sei $S(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$.

Vom Satz 5.4.1 folgt

$$S'(x) = f'(x)$$

$\Rightarrow$ S ist eine Stammfunktion von f'; seit f ist auch eine solche Stammfunktion ist; $\forall x$ $S(x) - f(x) = c$, konstant.

Aber $S(a) = \int_a^a f'(t)\,dt = 0$

ist $-f(a) = c$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} S(b) & = f(b) + c = f(b) - f(a) \\ \| & \\ \int_a^b f'(t)\,dt & \end{matrix}$$

$\square$

Das heisst: wir können viele Integrale berechnen, wenn wir Stammfunktionen kennen.

Problem: in der Regel, sind Stammfunktionen schwierig zu berechnen.

Beispiele:

(1) $(x^n)' = n x^{n-1}$ $\Longrightarrow$ $\frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$n \geq 1$

ist ~~[illegible]~~ eine Stammfunktion von x^n $(n \geq 0)$

$$\Longrightarrow \int_a^b x^n \, dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

(2) Die Formel

$$\int_a^b x^n \, dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right)$$

gilt auch für $n \leq -2$ (<u>nicht</u> für $n = -1$) und $a, b > 0$

$$\left(\text{z.B. } \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\right.$$

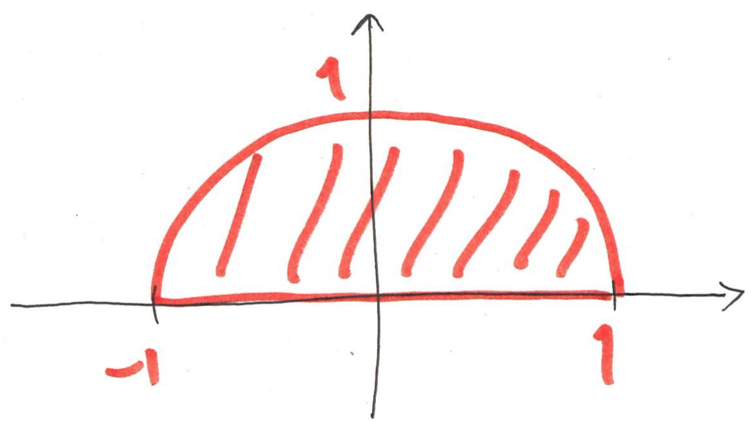
$a, b > 0$ weil $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

(3) $$\int_a^b \frac{1}{x} \, dx = \log(b) - \log(a)$$

$(a, b > 0)$ weil $(\log)' = \frac{1}{x}$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = ?$

(= FI (Halbkreis mit Radius 1))



Sei $S(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x)$

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} x \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

52

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2}$$

So S ist Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$

und

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = S(1) - S(-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \arcsin(1)\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \arcsin(-1)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$