Warum ist $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

beschränkt?

Falls nicht, es gibt (z.B.)

$\forall n \geq 1$, $x_n \in [a,b]$

mit $\boxed{f(x_n) \geq n}$

Die Folge (x_n) ist beschränkt

$\overset{B-W}{\Longrightarrow}$ es gibt eine konv. Teilfolge $(y_m)_{m \geq 1}$;

Sei $x_0 = \lim y_m$, $x_0 \in [a,b]$;

Stetigkeit von f $\Longrightarrow$ $f(x_0) = \lim f(y_m)$

aber $f(y_m)$ konv. nicht weil

$y_m = x_{t(m)}$, $t(m)$ streng wachsend

$\Rightarrow t(m) \geq m$

$\Rightarrow f(y_m) \geq t(m) \geq m$ weil $f(x_n) \geq n$

$\square$

3.5. Umkehrabbildung

Erinnerung (DM 3.6)

$f : X \longrightarrow Y$ bijektiv

$\Rightarrow$ es gibt die Umkehrabbildung

$f^{-1} : Y \longrightarrow X$

bijektiv, mit $f \circ f^{-1} = Id_Y$

$f^{-1} \circ f = Id_X$

[d.h. $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$]

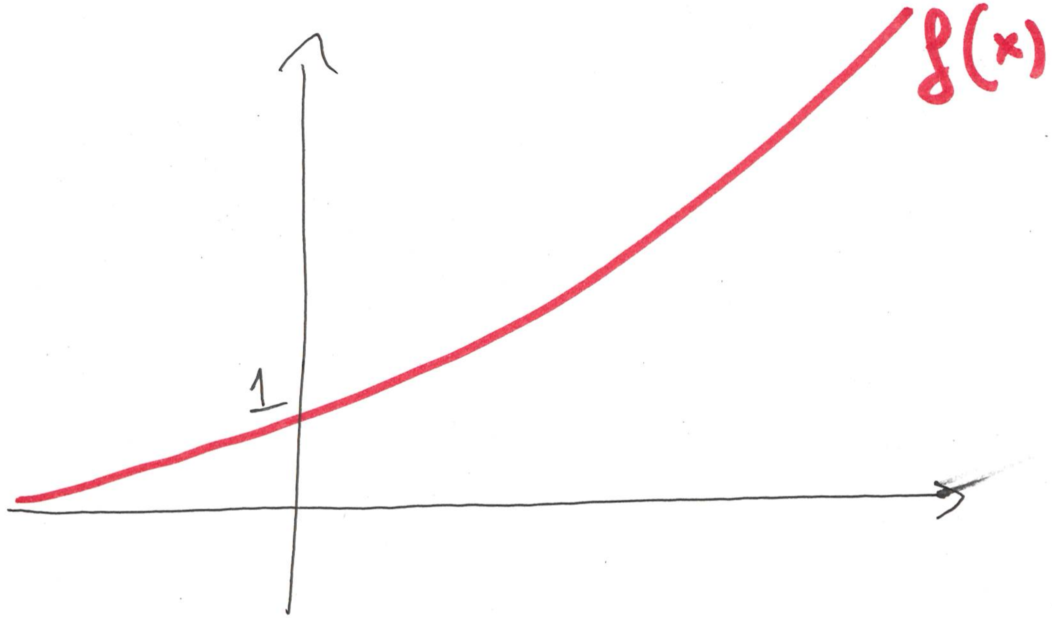
Satz (3.5.3). $I \subset \mathbb{R}$ Intervall (z.B. $I = \mathbb{R}$)

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

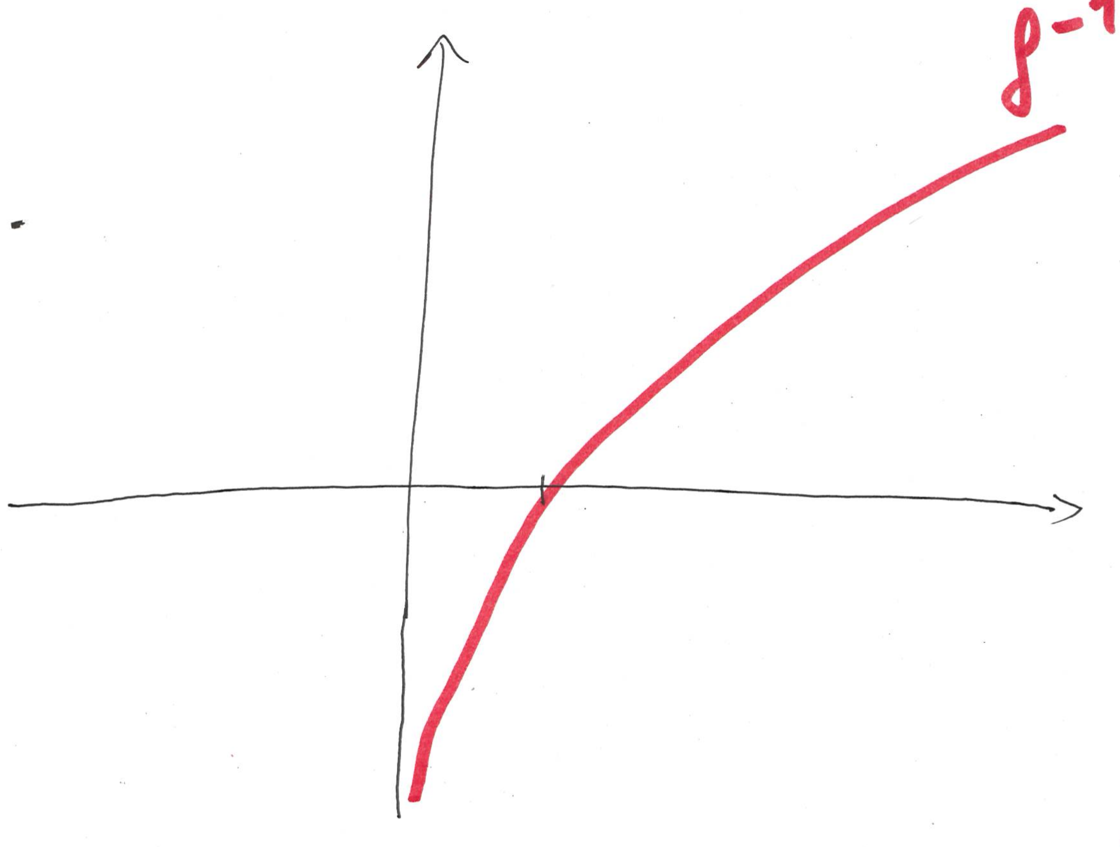
Falls f ist
- stetig auf I
- streng monoton

Dann ist $f(I) = J$ ein Intervall, $f : I \longrightarrow J$ ist bijektiv, und die Umkehrabbildung $f^{-1} : J \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ ist stetig, und streng monoton.

[f^{-1} wachsend $\Longleftrightarrow$ f wachsend]



1
f(x)



f⁻¹

<u>Beweis:</u> siehe Skript.

[das f bijektiv $f: I \longrightarrow J$ ist, ist einfach: surjektiv, weil $f(I) = J$, injektiv weil f ist streng monoton, z.B. falls f streng wachsend ist, und $x_1 \neq x_2$, gilt $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ oder } f(x_2) < f(x_1) \;]$$

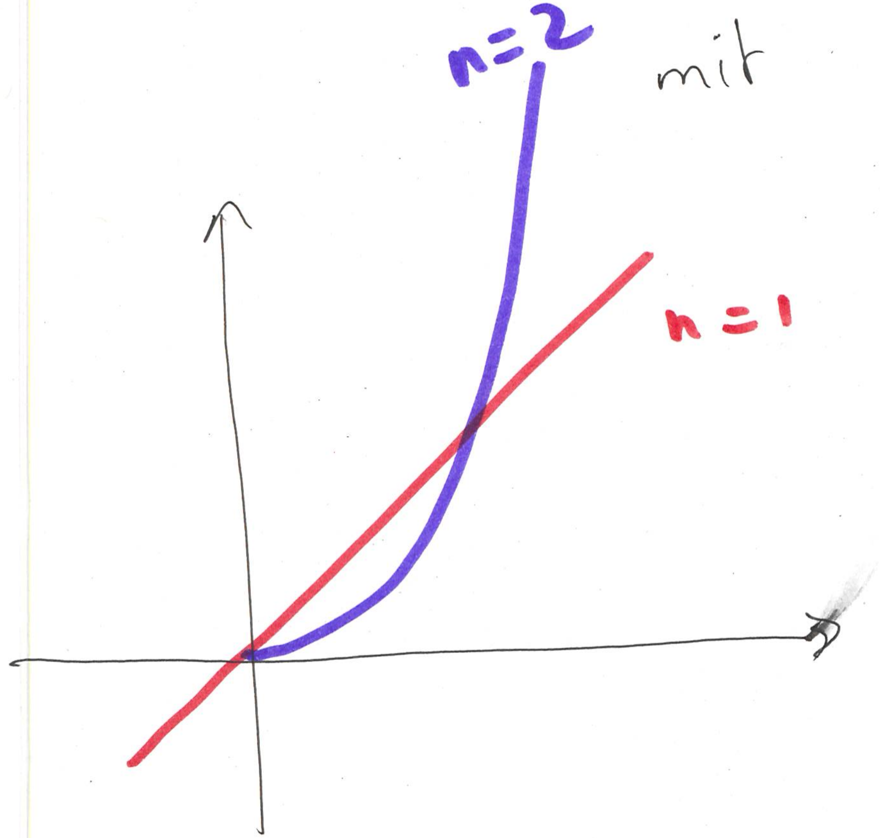
53

Beispiele.

(1) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Sei $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$

mit $f(x) = x^n$

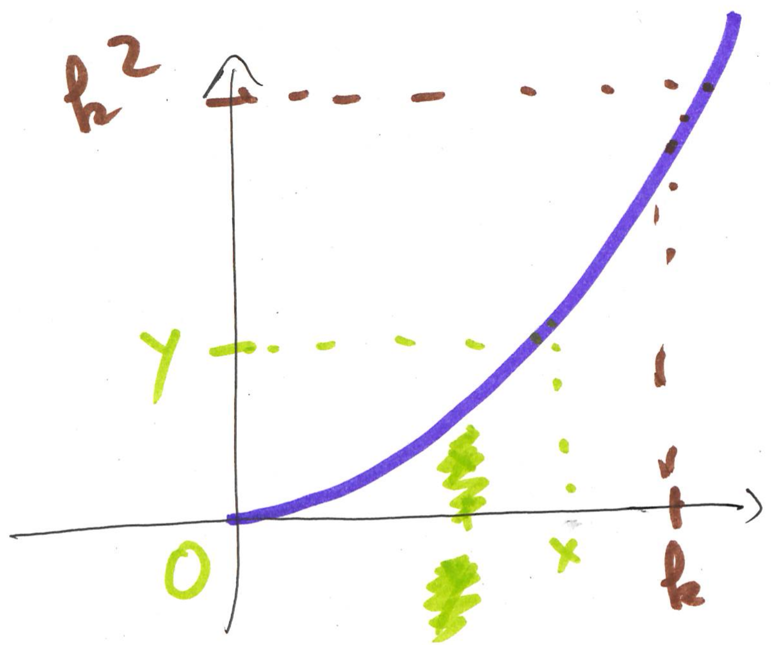


Die Funktion ist stetig, sie ist surjektiv, weil

$$\begin{cases} \lim\limits_{k \to +\infty} f(k) = \lim\limits_{k \to +\infty} k^n = +\infty \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

für jede $y \geq 0$, es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq y \leq k^n$

Zwischenwertsatz $\Longrightarrow$ $\exists\ x \in [0, k]$ mit $f(x) = x^{n} = y$.



Wegen Satz 3.5.3 es gibt eine stetige Funktion

$f^{-1}: [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$

sodass $\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = x, \\ f(f^{-1}(y)) = y \end{cases}$

55

z.B für $n = 2$ ist

$$f(y) = \sqrt{y}.$$

Wir bezeichnen $\sqrt[n]{y}$ diese Funktion.

(2) $f(x) = \exp(x), \quad x \in \mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$$

ist <u>stetig</u>, <u>streng wachsend</u> [schon gesehen]

Das Bild von f ist $]0, +\infty[$:

Es gilt
$$\begin{cases} f(n) = e^n \geq 2^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \\ (n \in \mathbb{N}) \\ f(-n) = e^{-n} = \dfrac{1}{e^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{cases}$$

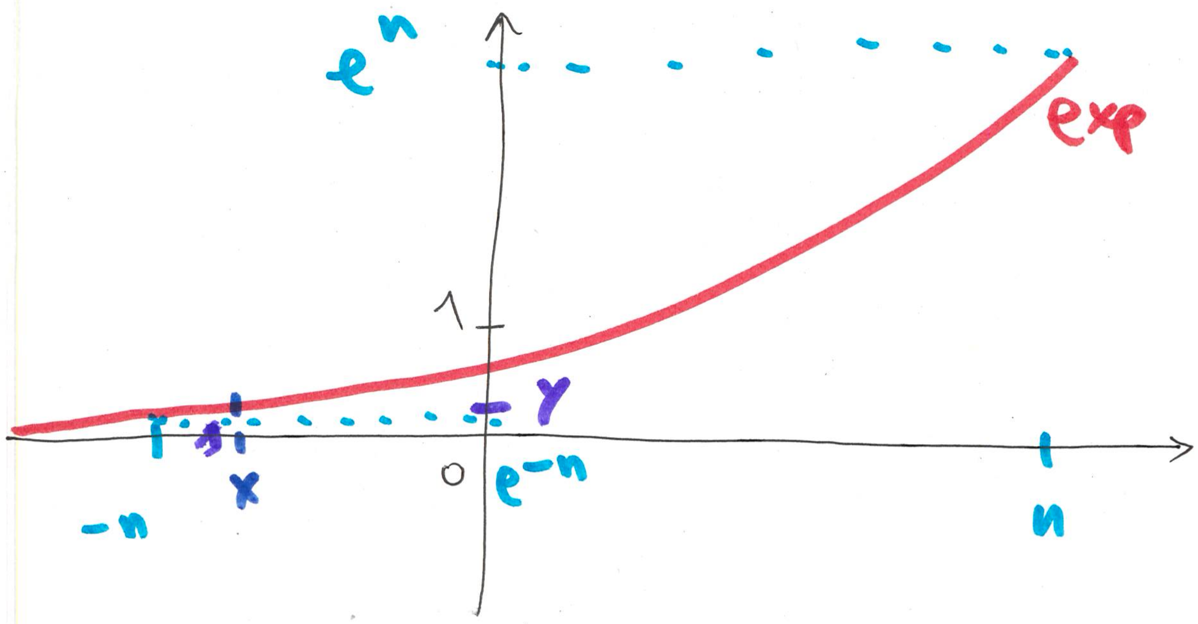
$\Rightarrow$ für jede $y > 0$, wir können $n \in \mathbb{N}$ finden mit

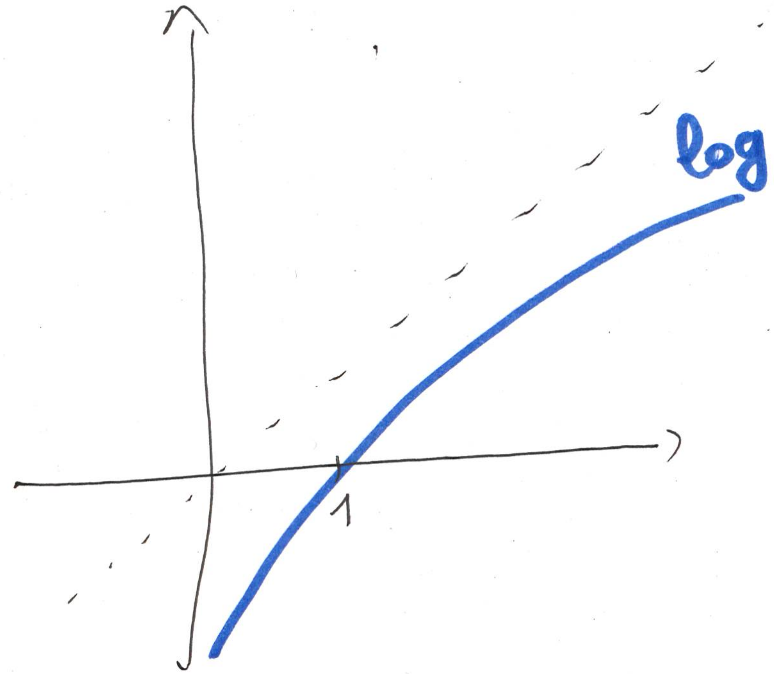
$$e^{-n} \leq y \leq e^{n}$$

Zwischenwertsatz
$\Rightarrow$ es gibt $x \in [-n, n]$

sodass $e^x = y$.

57





Satz 3.5.3 $\Longrightarrow$ es gibt eine Umkehrabbildung

$$\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig, streng wachsend, mit

$$\log(\exp(x)) = x, \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad \exp(\log(y)) = y \quad (y > 0)$$

Es gilt:

$$\log(1) = 0 \qquad (\text{weil } e^0 = 1)$$

$$\log(e) = 1 \qquad (\text{weil } e^1 = e)$$

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b),$$

für $a, b > 0$

$$\left(\text{weil } \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \underline{n \geq 1} \\ \underline{x > 0} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[n]{x} = \exp\left(\frac{\log(x)}{n}\right)$$

(weil, sei $y = \exp\left(\frac{\log(x)}{n}\right)$,

es gilt. $y > 0$

$$y^n = \exp\left(\frac{\log(x)}{n}\right)^n$$

$$= \exp\left(n \cdot \frac{\log(x)}{n}\right)$$

$$= \exp(\log(x)) = x \;)$$

<u>Notation.</u> $\boxed{x^\alpha = \exp(\alpha \log(x))}$

für $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Es gilt:

$$\begin{cases} x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \cdot x^{\beta} \\ (xy)^{\alpha} = x^{\alpha} y^{\alpha} \\ (x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\beta} \end{cases}$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$x, y > 0)$

[z.B.

$$(xy)^{\alpha} \overset{\text{Def.}}{=} \exp(\alpha \log(xy))$$
$$\overset{\text{Add. für log}}{=} \exp(\alpha(\log(x) + \log(y)))$$
$$= \exp(\alpha \log(x) + \alpha \log(y))$$
$$\overset{\text{Mult. für exp}}{=} \exp(\alpha \log(x)) \cdot \exp(\alpha \log(y))$$
$$\overset{\text{Def.}}{=} x^{\alpha} \cdot y^{\alpha}$$

61

3.6 – (schon gesehen)

3.7 – **Funktionenfolgen**

Seien X, Y Mengen und für $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \longrightarrow Y$

Wir sagen (f_n) ist eine **Funktionenfolge**.

Wir überlegen insb. den Fall
$X \subseteq \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$

und wenn

$\forall x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert.

Dann ist eine "neue" Funktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

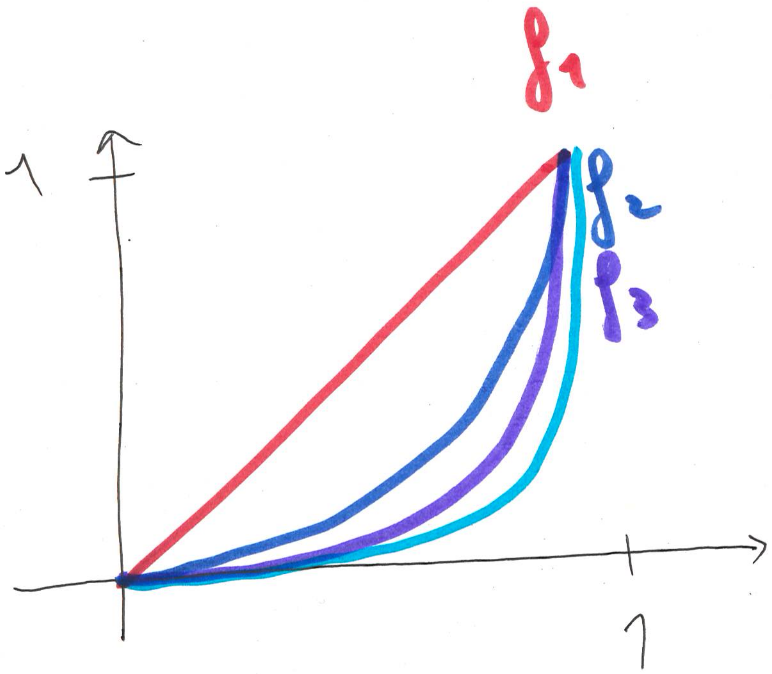
auf X definiert.

[<u>z.B.</u> $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{f_n(x)}$]

<u>Frage</u>: falls jede f_n auf X stetig ist, folgt (oder nicht) dass f ist stetig?

__Beispiel:__ $~~f~~$ $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^n$



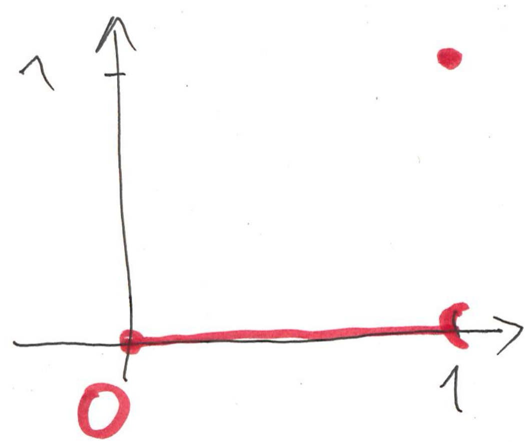
Sei $x \in [0,1]$;

falls $0 \leq x < 1$

ist $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

aber für $x = 1$ ist

$\lim x^n = \lim 1^n = 1$.



$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f ist <u>nicht</u> auf $[0,1]$ stetig.

<u>Definition</u> (3.7.3 / 3.7.5) ("<u>Gleichmässig</u> konvergenz")

$f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$

Wir nehmen an: für $x \in X$ existiert

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Die Folge (f_n) konvergiert <u>gleichmässig</u> gegen f, falls:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Vergleichen mit: "$f(x)$ existiert für alle x"

$$\Updownarrow$$

$$\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

<u>D.h.</u> für gegebene $\varepsilon > 0$, hängt die Wahl von N <u>nicht</u> von x ab.

Satz. (3.7.4)

Wenn (f_n) konvergiert gleichmässig gegen f <u>und</u> jede $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, dann ist f auch stetig.

Beweis. (siehe Skript.)

<u>Satz</u>: (Cauchy Kriterium für gleichmässige Konvergenz)
[Kor. 3.7.6]

Sei $X \subset \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$

(f_n) konv. gleichmässig gegen eine Funktion

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq N,$
$\forall x \in X, \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

[d.h. N hängt <u>nicht</u> von x ab!]

Beweis – (siehe Skript)

Fall von Reihen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

wo $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

[z.B. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$,

oder $\sum a_n x^n$ mit Konvergenzradius > 0]

Cauchy Kriterium (für Funktionenreihen):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

konv. gleichmässig (gegen eine "neue" Funktion)

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall m \geq n \geq N, \ \forall x \in X, \ \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

Satz (3.7.9) – $X \subset \mathbb{R}$

Seien $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sodass

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq c_n$

(jede f_n ist auf X beschränkt)

und sodass $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ ist konvergent.

Dann konv. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ gleichmässig auf X. Insbesondere, falls jede f_n stetig ist, konv. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ gegen eine stetige Funktion.

__Beweis.__ Wir überprüfen das Cauchy Kriterium für gleich. konv. von Reihen:

seien $\begin{cases} m \geq n \geq 0 & \text{in } \mathbb{N}: \\ x \in X \end{cases}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_n(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} c_n .$$

Weil $\sum c_n$ ist konvergiert, erfüllt sie das Cauchy Kriterium für Reihen in $\mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m \geq n \geq 0, \quad \sum_{k=n+1}^{m} c_n < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m \geq n \geq 0, \forall x \in X,$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

N ist wie für $\sum c_n$

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{\cos(n^2 x)}{n!}$$

Wegen $|\cos(y)| \leq 1$, folgt

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

und weil $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ konvergiert

folgt aus Satz 3.7.9, dass die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n!}$$

existiert <u>und</u> ist stetig auf $\mathbb{R}$.

74

<u>Satz</u> (3.7.11)

Sei $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ eine Potenzreihe mit >0 Konvergenzradius $r > 0$.

(1) Für $0 \leq s < r$, konv. die Reihe gleichmässig auf ~~[illegible]~~ $[-s, s]$

(2) Die Summe $\sum a_n x^n$ ist auf $]-r, r[$ <u>stetig</u>. (auf $\mathbb{R}$, falls $r = +\infty$)

75