Einführung

1) Was ist Analysis?
2) Warum ist sie wichtig?
3) Warum beweisen wir (fast) alles?

1) <u>Was?</u>

Diskrete Mathematik
("endliche/
abzählbare
Daten)

$\updownarrow$

Analysis
(stetig/kontinuierliche
Quantitäten)

Die Gesetze der Natur sind durch verhältnisse zwischen solche Quantitäten bestimmt
(<u>z. B.</u> Beschleunigung $\longleftrightarrow$ Kräfte)

2) <u>Warum</u>?

Sie können Analysis benutzen für:

i) Physikalische Prozessen simulieren

ii) wenn man ein Algorithmus/... studieren will [Laufzeit? Speicher? ...]

ist est oft viel einfacher mit Differenzial/Integralrechnung

<u>z. B.</u> Algorithmus

<u>Input</u>: $n \in \mathbb{N}$

<u>Laufzeit</u>: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

<u>Frage</u>: Wie gross ist $n!$?

Wieviel Stellen hat $1000!$

$\rightsquigarrow$ Stirlingsche Formel $\rightsquigarrow$ $1000!$ hat 2568 Stellen. (die Zahl π kommt da)

3) Beweise?

1 D-INFK will das!

2 Vielen Anwendungen brauchen etwas wie Beweise:

- Software für Flugzeug
- med. Geräte

3 Man lernt viel von Beweisen!

Notation:

siehe „Diskrete Mathematik"

für

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$
- Mengen $\quad (A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist ein Quadrat}\})$
- Funktionen $\quad f: A \longrightarrow B$, $\; a \longmapsto f(a)$
- ⋮

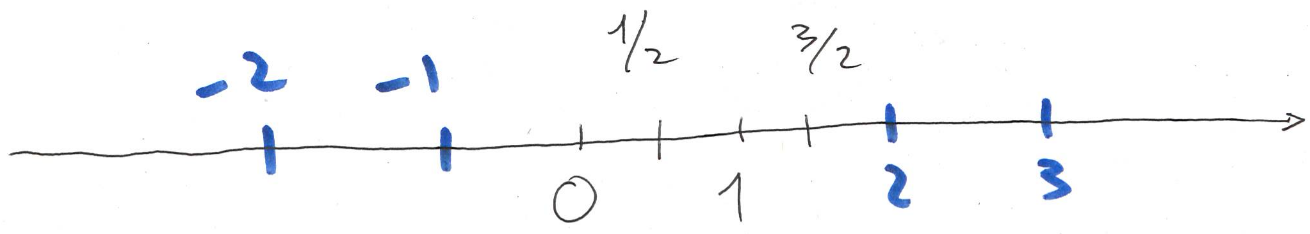
[DM...]

Kapitel I

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$

reellen Zahlen

1 . 1 . $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$



"keine Lücke"

$\mathbb{R}$

$\updownarrow$

unendliche Gerade

mit

Ursprung 0

Einheit 1

<u>1872</u> : Dedekind, ETH

1ste. Definition von $\mathbb{R}$, "aus der Def. der Mengen (Mengenlehre)"

Wir machen das ein bisschen anders, aber auch <u>axiomatisch</u>.

(Eindeutigkeit ist auch wichtig)

$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots, \}$ naturliche Zahlen

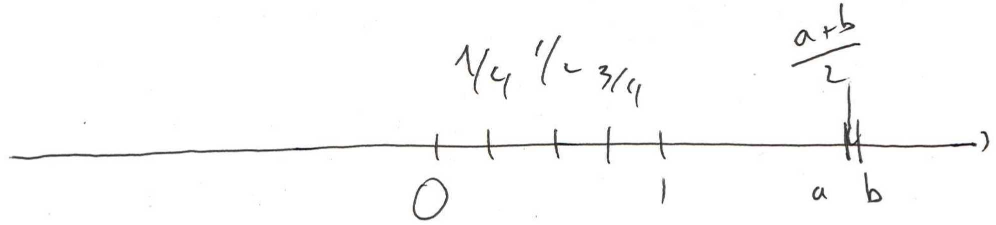
$\cap$

$\mathbb{Z} = \{, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$ ganze Zahlen

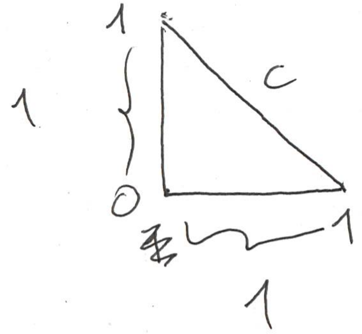
$\cap$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \}$ rationale Zahlen

($\mathbb{Q}$ ist ein Kommutativer Körper [DM 5.5])



Aber es gibt "Lücken" in $\mathbb{Q}$!



Pythagoras:

$$1^2 + 1^2 = c^2$$
$$2 = c^2$$

$\Rightarrow$

Es soll eine Quadratwurzel von 2 geben!

Aber es gibt <u>keine</u> in $\mathbb{Q}$!

[DM 4.8]

Satz 1.1.2. Es gibt eine Menge

$\mathbb{R}$ (reellen Zahlen) mit:

$\cup$

$\mathbb{Q}$

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ("Addition")

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ("Multiplikation")

$0 \in \mathbb{R}$

$1 \in \mathbb{R}$

eine Ordnungsrelation $\leq$

sodass:

① $\mathbb{R}$ mit $+, \cdot, 0, 1$ ist ein kommutativer Körper

② $\mathbb{R}$ mit $+, \cdot, 0, 1, \leq$ ist ein ~~ange~~ angeordneter Körper

auch für $\mathbb{Q}$

③ $\mathbb{R}$ ist "vollständig"

Erklärung:

1. $\mathbb{R}$ ist ein kommutativer Körper

(d.h. man kann addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren mit die übliche Regeln, z.B.

$$x(y+z) = xy + xz = yx + xz$$

$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$

$$0 \cdot x = 0$$

)

[DM 5.5]

(2) $\mathbb{R}$ ist ein <u>angeordneter Körper</u>:

$a \leq b$ ("a ist kleiner oder gleich b")

erfüllt:

$a \leq a$ ("Reflexivität")

$a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ ("Transitivität")

$a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$ ("Antisymmetrie")

Weiter: für a, b in $\mathbb{R}$, entweder ist $a \leq b$ <u>oder</u> $b \leq a$.

__und__

(K1) $\forall a\, \forall b\, \forall c$ in $\mathbb{R}$, $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

(K2) $\forall a \geq 0, \forall b \geq 0 \Rightarrow ab \geq 0$

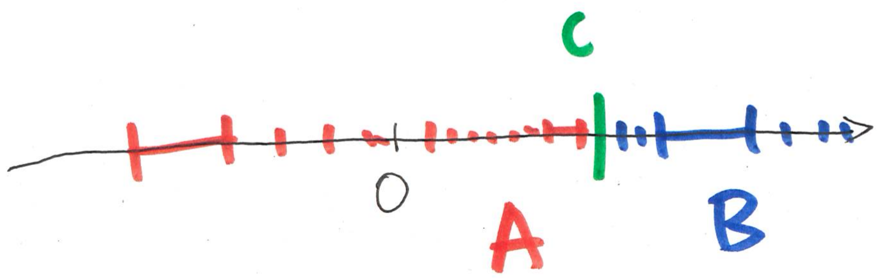
__Bemerkung__: $\mathbb{Q}$ erfüllt diese zwei erste Teilen der Eigenschaften von $\mathbb{R}$.

③ Vollständigkeit:

(V) Seien $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ Teilmengen von $\mathbb{R}$, $\begin{cases} A \neq \emptyset \\ B \neq \emptyset \end{cases}$

Falls: $\forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq b$

("A ist links von B")



Dann gibt es (mindestens) ein $c \in \mathbb{R}$ "zwischen A und B":

$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in A, \forall b \in B, \quad a \leq c \leq b$

__Satz__ - (1) $\mathbb{Q}$ erfüllt (V) __nicht__

weil (2) ~~∄~~ es gibt ein Quadratwurzel von 2 in $\mathbb{R}$.

Vor wir (2) beweisen können brauchen einige Folgerungen der Axiomen.

__Hilfsatz 1__ - (1) $a \geq 0 \iff (-a) \leq 0$

(2) $\forall a, \quad a^2 \geq 0$

(3) $a \leq b, \quad c \leq d \implies a + c \leq b + d$

(4) $0 \leq a \leq b, \quad 0 \leq c \leq d \implies 0 \leq ac \leq bd$

__Beweis__ -

(1) $a \geq 0 \overset{(K1)}{\Longrightarrow} \underbrace{a + (-a)}_{0} \geq \underbrace{0 + (-a)}_{-a}$

(2) Falls $\underline{a \geq 0} \overset{(K2)}{\Longrightarrow} a^2 = a \cdot a \geq 0$

Falls $\underline{a \leq 0}$: $(-a) \geq 0$ (von (1))

$\overset{(\text{Fall } 1)}{\Longrightarrow} (-a)^2 \geq 0$

$\Rightarrow a^2 \geq 0$

(3) $a \leq b \overset{(K1)}{\Longrightarrow}$ $\cancel{a+c \leq b+c}$

~~und~~ $\cancel{b+c}$ $a + c \overset{(K1)}{\leq} a + c + (d - c)$ [weil $0 \leq d-c$]

$= a + d$

$\overset{(K1)}{\leq} b + d$ [weil $a \leq b$]

17

(4) $$bd - ac = \underbrace{\underbrace{b}_{\geq 0}\underbrace{(d-c)}_{\geq 0}}_{\geq 0} + \underbrace{\underbrace{c}_{\geq 0}\underbrace{(b-a)}_{\geq 0}}_{\geq 0} \quad (K2)$$

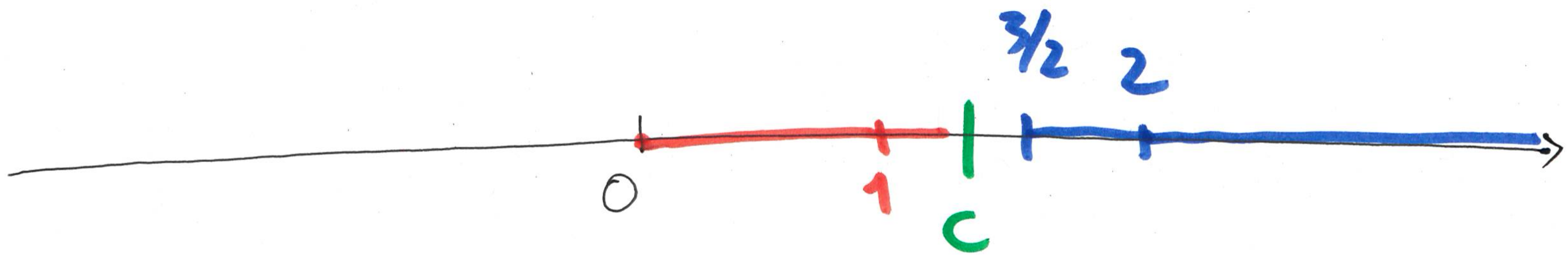
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\geq 0} \quad \cancel{(K1)} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \quad bd \geq ac \underset{(K2)}{\geq} 0$$

$\square$

<u>Archimedisches Prinzip</u> - "$\mathbb{N}$ ist unbeschränkt": für jede $x \in \mathbb{R}$, gibt es $n \in \mathbb{N}$ sodass $n > x$.

Wir nehmen an, dieses Prinzip gilt, und beweisen, das $\sqrt{2}$ existiert.



Seien $A = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0, a^2 \leq 2\}$

$\ni 0, 1$

$B = \{b \in \mathbb{R} \mid b > 0, b^2 \geq 2\}$

$\ni 2$

~~Bei~~ Für $a \in A$, $b \in B$, gilt

$a \leq b$.

(Weil $a^2 \leq 2 \leq b^2$

$$\Rightarrow \quad b^2 - a^2 \geq 0$$
$$\quad\quad\quad \shortparallel$$
$$(b-a)(b+a) \geq 0$$

aber $b + \underbrace{a}_{\geq 0} \geq b > 0 \Rightarrow (b+a)^{-1}$ existiert

Übung

und $\boxed{(b+a)^{-1} > 0}$

$$\Rightarrow \quad (b^2 - a^2) \cdot \frac{1}{b+a} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad b - a \geq 0 .\,)$$

(U) $\Rightarrow$ es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \leq c \leq b$$

für $a \in A$, $b \in B$.

Wir werden sehen: $c^2 = 2$.

Schritt 1 – $\boxed{c^2 \geq 2}$

Falls nicht $c^2 < 2$; insbesondere $c \in A$ ($c \geq 0$ weil $0 \in A$)

Dann finden wir $n \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

$$\Rightarrow \quad c + \frac{1}{n} \in A$$

aber dann ist $\underbrace{c + \frac{1}{n}}_{\in A} \leq c$: unmöglich weil dann wäre $\frac{1}{n} \leq 0$