Vorsicht! Eine Reihe die nicht absolut konv. ist (aber konvergent) kann man nicht umordnen wie man will!

$$(\log(2) =)\, S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \cdots$$

$$\text{"="} \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

$$+ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8}$$

$$+ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12}$$

$$\cdots$$

$$+ \boxed{\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}\right) - \frac{1}{4k+4}} + \cdots$$

$k=2$

$\boxed{k \geq 0}$

119

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \boxed{\frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4}} + \dots$$

$$\frac{1}{4k+2} - \frac{1}{4k+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)$$

$\underline{k \geq 0}$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right)$$

$$\overset{?}{\Rightarrow} S = \frac{1}{2} S \quad , \text{ aber } \boxed{S = \log(2) \neq 0}$$

??

Man kann konv. ~~&~~ aber <u>nicht absolut konv.</u>, Reihen nicht umordnen, wie man will.

120

Satz (2.7.16)

Falls $\sum x_n$ ist **abs.** **konvergent**, kann man sie umordnen "wie man will", d.h mit dieselbe Summe.

z.B. $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x_{2k+1} + x_{4k+2} + x_{4k+4} \right)$

falls $\sum x_n$ konv. absolut.

Beweis – siehe Skript.

Bemerkung – Falls $\sum x_n$ konvergiert [und $x_n \in \mathbb{R}$], nicht absolut, ist **jede** reelle Zahl ist die Summe einer umgeordnete Reihe.

(<u>z.B.</u> es gibt eine bijektive Abbildung

$$j : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$$

sodass

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{j(n)-1}}{j(n)} = \pi . \quad)$$

Ein einfaches hinreichendes Kriterium für abs. Konvergenz ist:

<u>Satz.</u> ("Quotientenkriterium")

Sei (x_n) eine komplexe Folge

mit $x_n \neq 0$ für $n \geq 0$.

Falls $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ beschränkt ist und

$$0 \leq \limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$$

(insb. falls $\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$)

ist $\sum x_n$ abs. konvergent.

Falls $\cancel{\frac{x_{n+1}}{x_n}}$ $\lim\cancel{\sup}\inf \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$,

ist $\sum x_n$ divergent. (insb. falls $\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$)

(Falls $\limsup \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$ kann man nichts in der Regel sagen).

Beispiele.

(1) $x_n = \frac{n!}{2^n}$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \frac{n+1}{2}$$

ist nicht beschränkt $\Rightarrow \sum x_n$ divergiert

(man sieht auch, x_n konv. <u>nicht</u> gegen 0).

(2) Sei $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, $x_n = q^n$

$$\Rightarrow \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{q^{n+1}}{q^n}\right| = |q| \longrightarrow |q|$$

d.h. $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ ist $\begin{cases} \text{abs. konv. für } |q|<1, \\ \underline{\underline{\text{div.}}} \text{ für } |q|>1 \end{cases}$

(hier ist auch $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ div. für $|q|=1$, weil dann $q^n \not\to 0$)

(3) Sei $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, und

$$x_n = \frac{z^n}{n!}, \quad n \geq 0. \quad (x_0 = 1)$$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut für <u>alle</u>

$z \in \mathbb{C}$ (weil für $z = 0$ ist die ~~Rie~~ Reihe $\underset{0^0 =}{1} + 0 + 0 + \dots = 1$)

<u>Def.</u> $e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

$(z \in \mathbb{C})$

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots$$

(die Exponential)

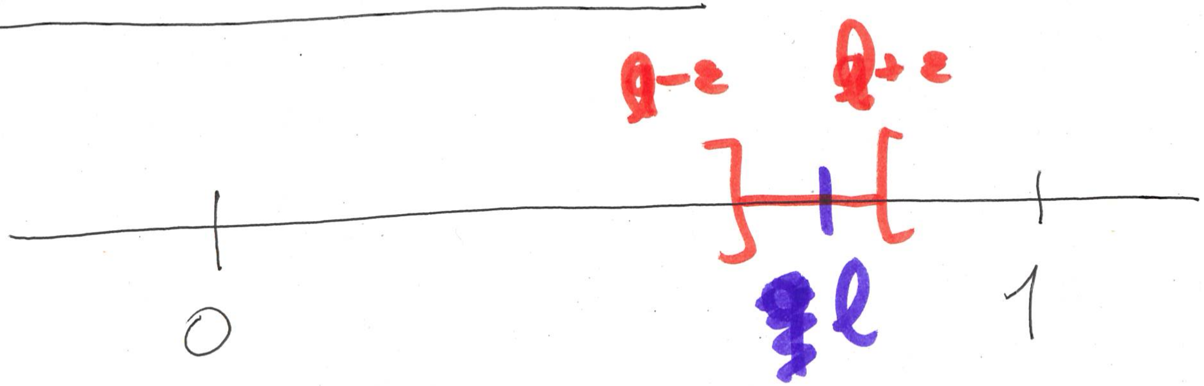
$$\exp(1) = e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots$$

$(= 2{,}718281828\dots)$

126

Beweis von Quotientenkriterium:

Falls $\lim \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$: sei $\ell = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$



Es gibt $\varepsilon > 0$ sodass $\ell + \varepsilon < 1$,

konv. von $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ gegen ℓ

$\Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N_0, \ \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < \ell + \varepsilon \ (< 1)$

Für $n \geq N_0$:

$$|x_n| = \underbrace{\frac{|x_n|}{|x_{n-1}|} \cdot \frac{|x_{n-1}|}{|x_{n-2}|} \cdot \ldots \cdot \frac{|x_{N_0+1}|}{|x_{N_0}|}} \cdot |x_{N_0}|$$

$$\leq \underbrace{(\ell+\varepsilon) \cdot \ldots \cdot (\ell+\varepsilon)}_{n - N_0 \text{ mal}} \cdot |x_{N_0}|$$

d.h. $$|x_n| \leq \frac{|x_{N_0}|}{(\ell+\varepsilon)^{N_0}} (\ell+\varepsilon)^n = C q^n$$

def. eine konv. Reihe

wo $$\begin{cases} C = \dfrac{|x_{N_0}|}{(\ell+\varepsilon)^{N_0}} \in \mathbb{R} \\ q = \ell+\varepsilon \in [0,1[\end{cases}$$

$\Longrightarrow$ die Reihe $\sum |x_n|$ konvergiert

d.h. $\sum x_n$ is abs. konvergent

<u>Bemerkung</u> : im Skript gibt es auch das "Wurzelkriterium" (Satz 2.7.20).

<u>Beispiel</u> - Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und $x_n = \dfrac{1}{n^k}$, $n \geq 1$.

[<u>z.B</u> : $k = 1$, $x_n = \frac{1}{n}$; $k = 2$, $x_n = \frac{1}{n^2}$]

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{(n+1)^k} \frac{n^k}{1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$$

Wir wissen : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ existiert

und ist gleich $\frac{1}{1} = 1$. [Quotient von Polynome vom Grad k]

Aber : $\begin{cases} \text{für } \underline{k=1}, & \sum \frac{1}{n} \text{ divergiert} \\ \underline{k=2}, & \sum \frac{1}{n^2} \text{ konvergiert} \end{cases}$

<u>Für</u> : $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$

__Potenzreihen:__ wir überlegen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, komplexen Folge, und für jede $z \in \mathbb{C}$, die Reihe $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n}$.

[__z.B.__ $x_n = 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$

$x_n = \frac{1}{n!}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$]

__Satz.__ (siehe Kor. 2.7.24)

Eine der folgenden Möglichkeiten gilt (und nur eine):

(1) für $z \neq 0$, $\sum x_n z^n$ divergiert

[<u>z.B.</u> $x_n = n!$ (weil $n!\, z^n$ konv. <u>nicht</u> gegen 0, falls $z \neq 0$)]

Man sagt: das Konvergenzradius der Potenz-reihe $\sum x_n z^n$ ist <u>$r = 0$</u>.

(2) für alle $z \in \mathbb{C}$, $\sum x_n z^n$ konv. <u>absolut</u>

[<u>z.B.</u> $x_n = \frac{1}{n!}$]

$\rightsquigarrow$ "das Konvergenzradius ist $r = +\infty$"

(3) es gibt $r \in \,]0, +\infty[$ sodass

$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n$ <u>konv. absolut</u> für $|z| < r$

$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n z^n$ <u>divergiert</u> für $|z| > r$

(und für $|z| = r$ kann alles passieren, und hängt von z ab.)

Man sagt dass r ist das Konvergenzradius.

[<u>z.B.</u> $x_n = 1$, $r = 1$; in diesem Fall ist $\sum z^n$ divergent für $|z| = 1$,

$x_n = \frac{1}{n+1}$, $r = 1$; für $z = 1$, ist die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = +\infty$

für $z = -1$ ist die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ist konvergent aber nicht absolut]

<u>Beweis.</u> (Idee)

Sei

$$A = \left\{ r \in]0, +\infty[\;\middle|\; (|x_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt} \right\}$$

<u>Eigenschaft:</u> falls $r \in A$, folgt $]0, r] \subset A$.

[

(Weil: für $s \leq r$,

$$|x_n| s^n = \underbrace{|x_n| r^n}_{\substack{\text{beschränkt} \\ (r \in A)}} \cdot \underbrace{\left(\frac{s}{r}\right)^n}_{\substack{\text{beschränkt} \\ (0 \leq \frac{s}{r} \leq 1)}}$$

)

<u>Fall 1</u>: falls $A = \emptyset$, konvergiert $\sum x_n z^n$ für keine $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

<u>Fall 2</u>: falls $A =]0, +\infty[$, konvergiert $\sum x_n z^n$ immer.

(<u>Weil:</u>

$$|x_n z^n| = \underbrace{|x_n (2z)^n|}_{\text{beschränkt}} \cdot \frac{1}{2^n} \quad (2|z| \in A)$$

$\Rightarrow \sum |x_n z^n|$ konvergiert

durch Vergleichsprinzip).

Fall 3 : wenn $A \neq \emptyset$, $A \neq]0, +\infty[$

ist A von oben beschränkt:

(weil sonst, folgt $A =]0, +\infty[$ aus der Eigenschaft "$r \in A \Rightarrow]0, r] \subset A$")

$\Longrightarrow$ es existiert $r = \sup(A) > 0$

weil es mindestens eine Zahl, > 0, in A gibt

Man beweist: für $|z|>1$, $\sum x_n z^n$ divergiert, für $|z|<1$, $\sum x_n z^n$ konv. absolut.

Das Problem der "Vertauschung von Grenzwerte"

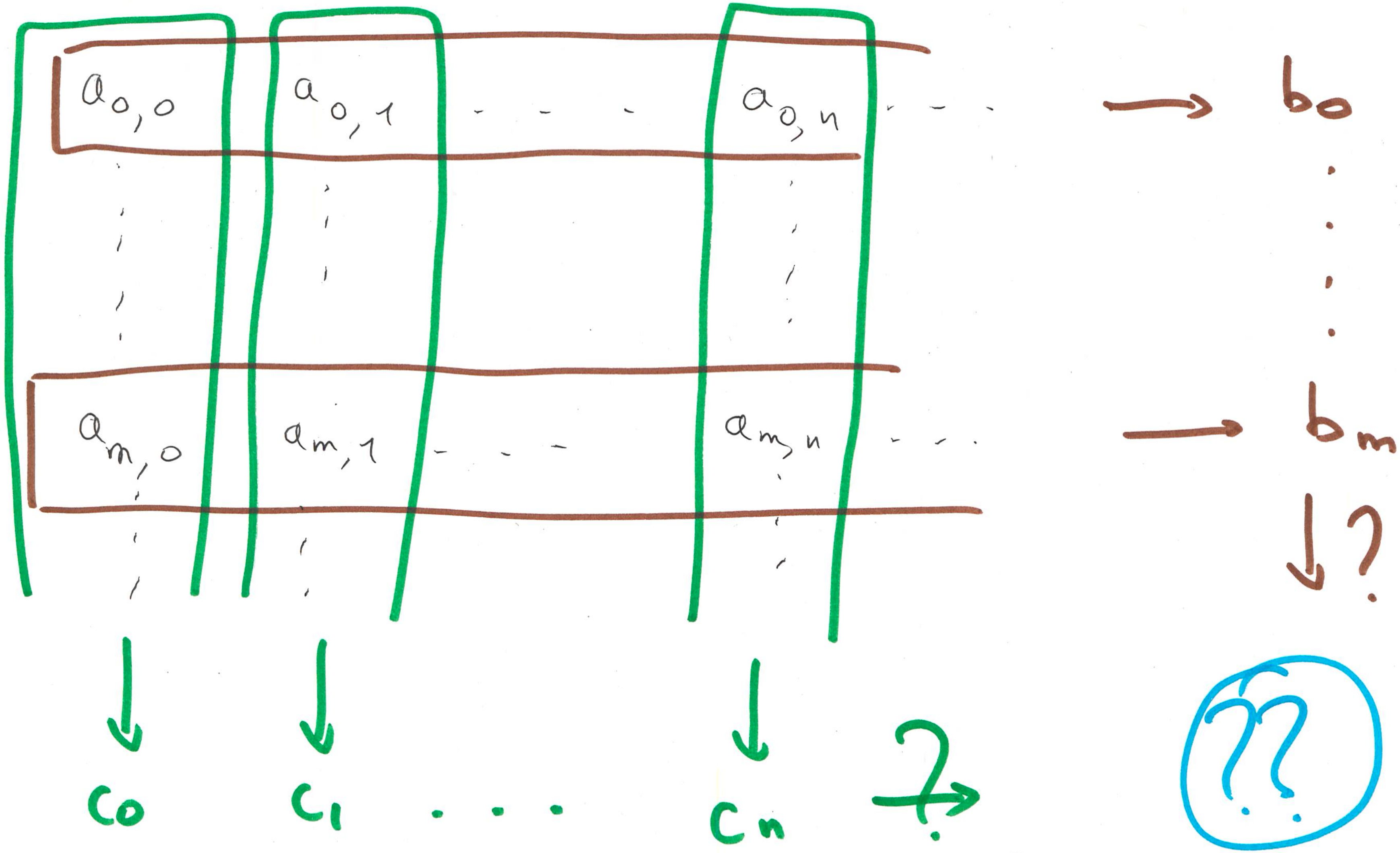
Dieses Problem kommt immer wieder in der Analysis.

Seien $(a_{m,n})_{m,n\geq 0}$ komplexe Zahlen die wir als „für jede $m\in\mathbb{N}$, es gibt eine Folge $(a_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$" ~~oder~~ interpretieren; oder „für jede $n\in\mathbb{N}$, es gibt die Folge$_n$ $(a_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$"

$$
\begin{array}{l|llll|l}
 & n=0 & & n & & \\
m=0 & a_{0,0} & a_{0,1}\ \cdots & a_{0,n} & \cdots & \longrightarrow b_0 \\
m=1 & a_{1,0} & a_{1,1}\ \cdots & a_{1,n} & \cdots & \longrightarrow b_1 \\
 & & & & & \\
m & a_{m,0} & a_{m,1}\ \cdots & a_{m,n} & \cdots & \longrightarrow b_m
\end{array}
$$

Es kann sein, dass für jede $m \in \mathbb{N}$, die Folge $(a_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Zahl $b_m \in \mathbb{C}$.

Und es kann sein: für jede $n \in \mathbb{N}$, die Folge $(a_{m,n})_{m \in \mathbb{N}}$ ______ ______ $c_n \in \mathbb{C}$.



Problem:

$$\lim_{m\to\infty} b_m \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} c_n$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\right) \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{m,n}\right)$$

Beispiel: $m \geq 3, \quad n \geq 0$

$$a_{m,n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)^k$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)^n$$

m fest: $n \to \infty$:

$$\lim a_{m,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)^k$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)} = b_m$$

$\frac{1}{m} < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{m} < 1$

n fest : $m \longrightarrow \infty$

$$a_{m,n} = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)^n$$

$$\xrightarrow{\boxed{m \to \infty}} 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$= c_n$$

Ist

$$\lim_m b_m \overset{?}{=} \lim c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{array}{c} \lim_m b_m \\ \parallel \\ \lim_m \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m}\right)} \end{array} = \lim \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{m}} = 2 \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \parallel 2$$