$$2-\left(c+\frac{1}{n}\right)^2 \qquad (n \geq 1)$$

$$= 2-\left(c^2+\frac{2c}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \underbrace{\left(2-c^2\right)}_{\substack{>0 \\ \text{(Hypothese)}}} - \frac{1}{n}\underbrace{\left(2c+\frac{1}{n}\right)}_{\leq 2c+1}$$

$$\geq \left(2-c^2\right) - \frac{2c+1}{n}$$

Diese Zahl ist $\underline{>0}$ falls

$$\frac{2c+1}{n} < 2-c^2$$

d. h. $$n > \frac{2c+1}{2-c^2}$$

Solch ein $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq 0)$ existiert wegen das Prinzip von Archimedes.

<u>Schritt 2</u> – $\boxed{c^2 \leq 2}$ $\rightsquigarrow$ ähnlich

---

<u>Bemerkung</u> – Ähnlicherweise beweist man das für jede $x \geq 0$, es gibt $t \geq 0$ sodass $t^2 = x$; diese Zahl (ist eindeutig) bezeichnen wir $\boxed{\sqrt{x}}$.

Beweis des Prinzips von Archimedes

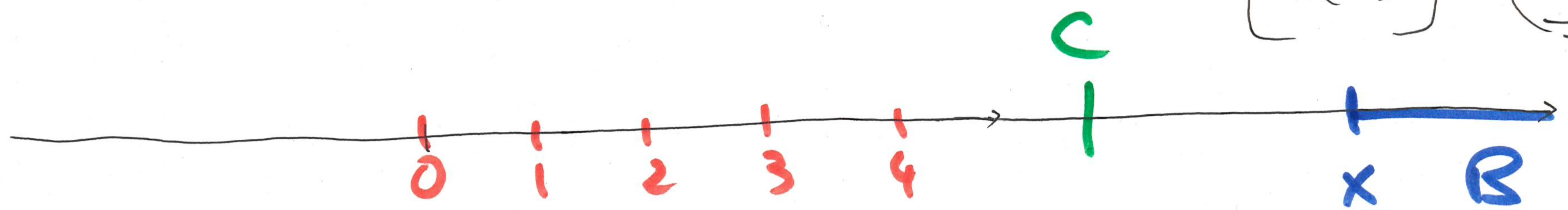
<u>Ziel:</u> $x \in \mathbb{R}$ gegeben; wir wollen $n \in \mathbb{N}$ finden, $n > x$.

Wir <u>nehmen an</u>, n existiert nicht.

$$A = \mathbb{N} \neq \emptyset$$

$$B = \{ b \in \mathbb{R} \mid \forall a \in \mathbb{N},\ b \geq a \} \neq \emptyset$$

$(x \in B)$ (<u>Hyp.</u>)



und $a \leq b$ für $a \in A$, $b \in B$.

(V) $\Rightarrow$ es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit

$$a \le c \le b$$

für $a \in A = \mathbb{N}$, $b \in B$.

Es folgt $a+1 \le c$ für $a \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $a \le c-1$ für $a \in \mathbb{N}$

d.h. $c-1 \in B$

$\Rightarrow$ $c \le c-1$

Unmöglich!

Bemerkungen.

① **Eindeutigkeit von $\mathbb{R}$?**

Falls $\mathbb{R}'$ mit $+'$, $\cdot'$, $0'$, $1'$, $\leq'$ ist auch eine Menge die die Eigenschaften von $\mathbb{R}$ erfüllt (z. B. $x' +' y' = y' +' x'$ für $x' \in \mathbb{R}'$, $y' \in \mathbb{R}'$)

dann gibt es eine (eindeutige) **bijektive** Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}'$$

mit

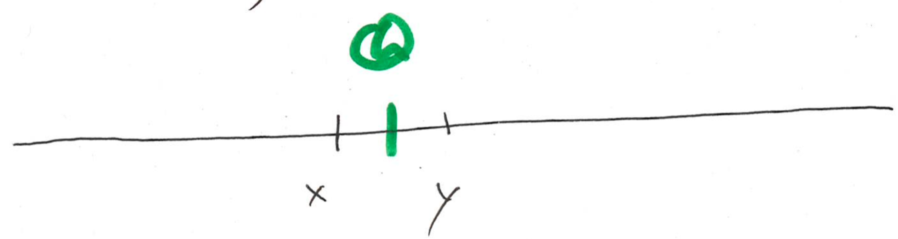
$$f(x+y) = f(x) +' f(y)$$
$$f(0) = 0', \quad f(1) = 1'$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y)$$

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y)$$

(Man sagt: f ist ein "Isomorphismus")

(z.B. $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$)

(2) Wir werden sehen: $\mathbb{Q}$ ist "dicht" in $\mathbb{R}$: für $x < y$ in $\mathbb{R}$, gibt es (mindestens) ein $z \in \mathbb{Q}$, $x < z < y$.



(z.B. zwischen $x = \sqrt{2}$ und $y = \sqrt{2} + \frac{1}{10^{1000}}$, es gibt eine $x \in \mathbb{Q}$)

(3) $\mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> abzählbar

[DM 3.7]

(aber $\mathbb{Q}$ <u>ist</u> abzählbar)

Obere und ~~unteren~~ untere Schranken

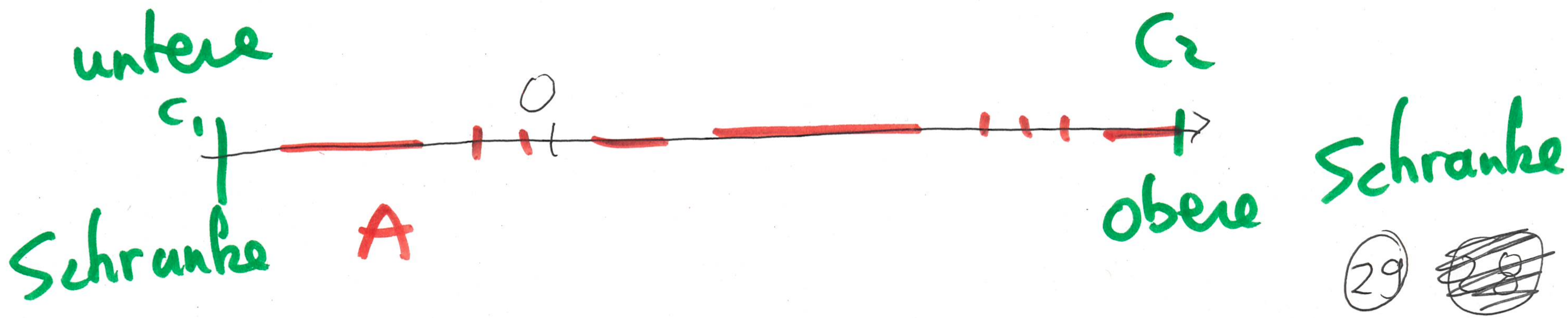
<u>Def.</u> (1.1.12) $A \subset \mathbb{R}$

(1) Eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ ist eine $\left(\frac{\text{obere}}{\text{untere}}\right)$ bzw Schranke von A

$\Updownarrow$ def.

$\forall a \in A, \quad a \leq c$

(bzw $\forall a \in A, \quad a \geq c$)



(2) Eine $c \in \mathbb{R}$ ist ein/das Maximum (bzw. Minimum) von A

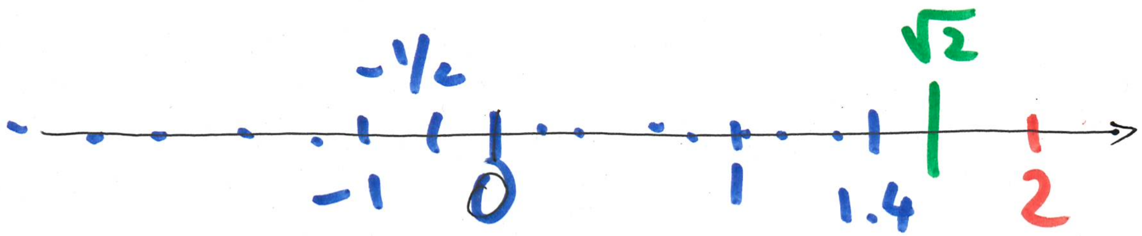
$$\Updownarrow_{\text{def.}}$$

$c \in A$ <u>und</u> c ist eine obere Schranke (bzw. untere Schranke) von A.

<u>Wenn</u> ein Max. (bzw. Min) existiert, ist es $\mathrm{Max}(A)$ (bzw. $\mathrm{Min}(A)$) bezeichnet.

<u>z.B.</u> $\mathrm{Min}(\mathbb{N}) = 0$, aber $\mathbb{N}$ hat kein Maximum.

Beispiel. $A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2} \}$



A hat eine obere Schranke,

z.B. 2

Aber A hat kein Maximum.

Warum? Weil wenn $\operatorname{Max}(A) = c$ existiert, würde $\begin{cases} c^2 = 2 \\ c \in A \subset \mathbb{Q} \end{cases}$

was nicht möglich ist.

Wir nehmen an $c = \max(A)$ existiert.

$\to \quad c \in A, \quad c \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow c^2 \le 2$

<u>Und</u> falls $c^2 < 2$ können wir $n \ge 1$ finden sodass $\underbrace{\left(c + \frac{1}{n}\right)}_{\in \mathbb{Q}}^2 < 2$

d. h. $c + \frac{1}{n} \in A$, aber $\underbrace{c + \frac{1}{n}}_{\text{in } A} > \underset{\max(A)}{\overset{\shortparallel}{c}}$

Widerspruch!

Aber: es gibt für alle beschränkte Mengen immer etwas "fast so gut wie" das Max. / Min.

Satz (1.1.15). Sei $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Wenn A hat eine obere Schranke (bzw. untere ———)

dann gibt es eine **kleinste** obere Schranke. Diese Zahl ist das **Supremum** von A, bezeichnen $\sup(A)$.

(bzw. eine grösste untere Schranke,

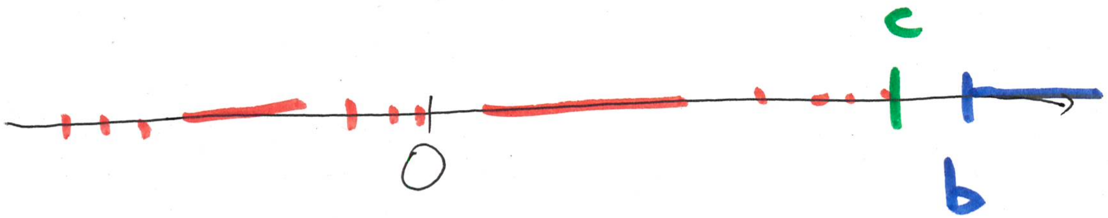
das Infimum $\inf(A)$)

Bemerkung. Satz 1.1.15 ist äquivalent mit (V).

Beweis. Sei

$$B = \{ b \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A,\ a \leq b \}$$

Die Hypothese bedeutet genau $\boxed{B \neq \emptyset}$ und



$a \leq b$ für $a \in A$, $b \in B$.

(V) $\Longrightarrow$ $\exists\, c$ sodass $\forall a \in A,\ \forall b \in B,$ $\underbrace{a \leq \overbrace{c \leq b}^{c\, =\, \mathrm{Min}(B)}}_{c \text{ ist ein Element von } B}$

c ist ein Element von B

<u>D. h.</u>: $\begin{cases} c \text{ gehört } B \\ c \text{ ist kleiner als jede Zahl in } B \end{cases}$

d. h. $c = \mathrm{Min}(B)$.

Beispiele.

(1) $A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2} \}$.

$A \neq \emptyset$

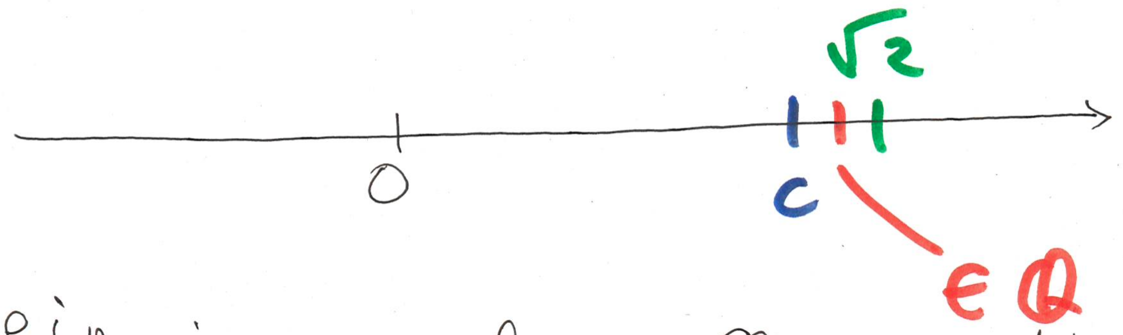
A ist ~~B~~ von oben Beschränkt.

$$\sup(A) = \sqrt{2}$$

Warum? zuerst sind alle $a \in A$ $\leq \sqrt{2}$ (Def.!), d.h. $\sqrt{2}$ ist eine ob. Schranke.

Ist $\sqrt{2}$ die kleinste?

Sei $c < \sqrt{2}$, ist c eine ob. Schranke von A?



Nein: weil $\mathbb{Q}$ **dicht** in $\mathbb{R}$ ist, gibt es $\underline{x \in \mathbb{Q}}$ sodass

$$c < \underbrace{x < \sqrt{2}}$$

d.h. $x \in A$, $\underline{x > c}$, d.h genau dass c keine ob. Schranke von A ist!

(2) Falls $\mathrm{Max}(A)$ existiert, ist

$$\mathrm{Sup}(A) = \mathrm{Max}(A).$$

(z. B. $\mathrm{Inf}(\mathbb{N}) = \mathrm{Min}(\mathbb{N}) = 0$).

Warum? Sei $c = \mathrm{Max}(A)$.

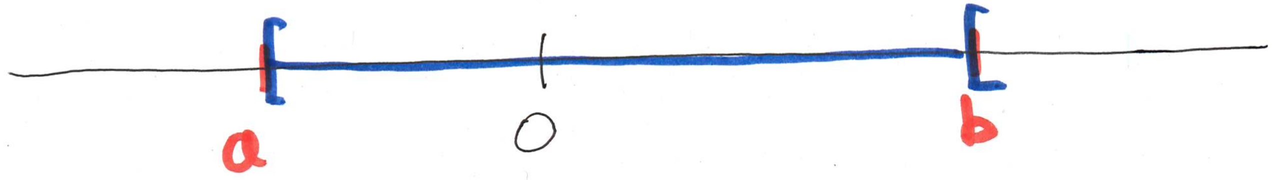
Dann ist c eine obere Schranke und falls $x < c$ ist x nicht eine ob. Schranke weil $x < c$ und $c \in A$.

D. h. $c = \mathrm{Sup}(A)$.

(3) Seien $a < b$ in $\mathbb{R}$.

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \underline{\underline{a \leq x}} < b \}$$

$(a \in A$
$b \notin A)$



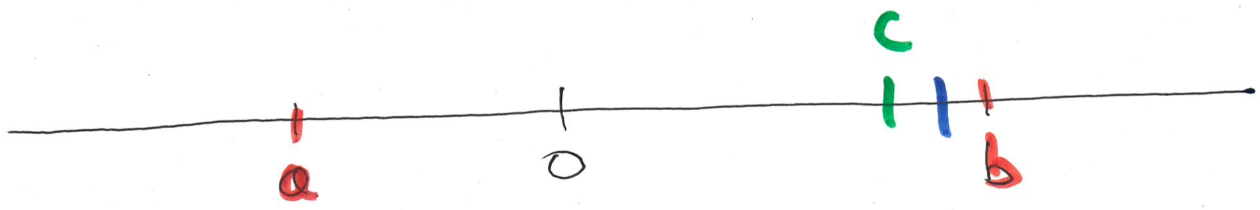
$$\begin{cases} \mathrm{Sup}(A) = b, & \mathrm{Max}(A) \text{ existiert nicht} \\ \mathrm{Inf}(A) = a = \mathrm{Min}(A) \end{cases}$$

- $a \in A$ und alle $x \in A$ sind $\geq a$,

d.h. $a = \mathrm{Min}(A) = \mathrm{Inf}(A)$

- b ist eine ob. Schranke von A

und falls $c < b$



$\frac{c+b}{2} \in A$, ist $> c$

$\rightsquigarrow$ c ist nicht eine ob. Schranke.

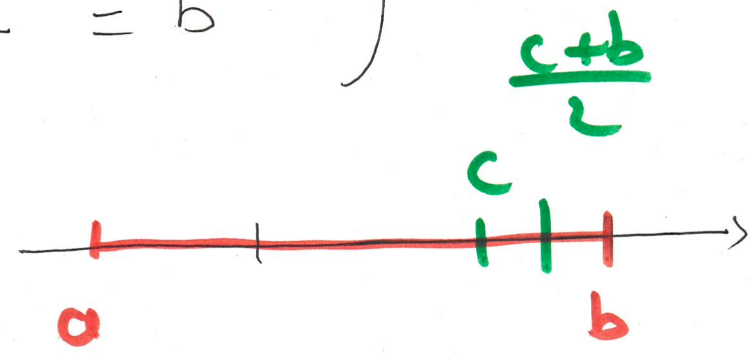
~~Fall~~ <u>Fall 1</u>: $c < a$, c ist nicht eine ob. Schranke (weil $a \in A$)

<u>Fall 2</u>: $c \geq a$, dann ist $\frac{c+b}{2} \in A$

(weil $\frac{c+b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \geq \frac{a+a}{2} = a$

und $\frac{c+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$)

und $\frac{c+b}{2} > c$



sodass c ist nicht eine ob. Schranke.

<u>Bemerkung</u>. Wie überprüft man, dass $\sup(A) = c$?

(i) Zuerst überprüfen, ob ein Max. existiert, und $c = \max(A)$.

(ii) Überprüfen dass

$$\forall a \in A, \quad a \leq c$$

(iii) Sei $x < c$, ~~find~~ finden eine Zahl

$$a \in A$$

mit $\boxed{x < a} \leq c$