Beispiel. (Kor. 2.7.29)

Satz. Sei $z \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{z}{m}\right)^m$$

(Insb. $e = \exp(1) = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$)

Dies folgt aus Vertauschung zwei Grenzwerte.

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = 1 + \frac{z}{m} + \binom{m}{2}\left(\frac{z}{m}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{m}\right)^m$$

Binomialsatz, Anhang A

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{z}{m}\right)^k \quad (+0+0+\dots)$$

Binomialkoeffizienten

$$= \frac{m!}{k!\,(m-k)!}, \quad 0 \le k \le m$$

= Anzahl der Teilmengen von $\{1,\dots,m\}$ mit k Elemente

<u>Frage</u>: was passiert als $m \to \infty$?

$$\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n}$$

wo

$$x_{m,n} = \begin{cases} \binom{m}{n}\left(\frac{z}{m}\right)^n, & 0 \le n \le m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\underline{\underline{\lim_{m\to\infty} x_{m,n}}}\right)$$

wenn die Vertauschung möglich ist

Sei n feste natürliche Zahl.

$$x_{m,n} = \binom{m}{n} \left(\frac{z}{m}\right)^{n}, \quad m \geq n$$

(alle m gross genug)

$$= \frac{m!}{n!\,(m-n)!} \frac{z^{n}}{m^{n}}$$

$$= \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \cdot \frac{z^{n}}{m^{n}} = \frac{p(m)}{q(m)}$$

p, q Polynome

$$\xrightarrow[m \to \infty]{} \frac{z^{n}}{n!} \frac{1}{1}$$

146

Die Vertauschung impliziert

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{z^n}{n!} = \lim_{m\to\infty} x_{m,n}$$

$$= \exp(z)$$

In diesem Fall ist die Vertauschung erlaubt (siehe Satz 2.7.28).

__Beispiel.__ Ein Fall, wo die Vertauschung nicht gilt: Doppelte Reihe

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n}\right) \overset{?}{\neq} \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,n}\right)$$

Sei

$\underline{m=0}$: $\quad \overset{n=0}{1} - \overset{n=1}{1} + 0 + 0 + \ldots$

$\underline{m=1}$: $\quad 0 + 1 - 1 + 0 + \ldots$

$\quad\quad +1 - 1$

$\quad\quad +1$

$\vdots$

$\underline{m}$: $\quad 0 + 0 + \ldots \ldots + \boxed{1} - 1 + 0 \ldots$

m

d.h. $$x_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ -1, & n = m+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Was ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n}$?

Für alle m: $$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n} = 0 + \dots + 0 + 1 - 1 + 0 + \dots + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n} \right) = 0$$

Für alle n:

<u>$n = 0$</u> : $\sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,0} = 1 + 0 + 0 + \dots = \underline{1}$

<u>$n \geq 1$</u> : $\sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,n} = 0 + \dots + 0 - \underline{1} + \underline{1} + 0 + \dots = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,n} \right) = \underline{1} \neq \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n} \right)$$

Satz. (2.7.23)

Seien $(x_{m,n})_{m,n \in \mathbb{N}}$ komplexe Zahlen.

Wir nehmen an: es gibt $C \geq 0$ sodass für alle M, N in $\mathbb{N}$,

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} |x_{m,n}| \leq C$$

Dann sind ~~beide~~ alle Zeilen/Spalten Reihen absolut konvergent und

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x_{m,n}\right)$$

beide Reihen sind absolut konvergent

<u>Beweis</u> - siehe Skript.

Hyp. ist, die Summe von $|x_{m,n}|$ sind beschränkt

$$\boxed{\begin{matrix} x_{0,0} & \cdots & x_{0,n} \\ \vdots & & \\ x_{m,0} & \cdots & x_{m,n} \end{matrix}}$$

Beispiel.

Mit

$$x_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ -1, & n = m+1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c} & \underline{n=0} \qquad\qquad\qquad\qquad M \\ \hline \underline{m=0} & \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & & \cdots \\ \vdots & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & 1 & & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \end{matrix}} \\ \underline{m} & \end{array}$$

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{M} |x_{m,n}| = 1 + 2 \cdot (M) = 2M + 1$$

ist unbeschränkt

153

Beispiel: $\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x_m\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right) = ?$

Für partielle Summen: für $M \in \mathbb{N}$

$$(x_0 + \dots + x_M) \cdot (y_0 + \dots + y_M)$$
$$= \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{M} x_m y_n$$
$$= x_0 y_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0) + \dots + x_M y_M$$

<u>Frage</u>: ist

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{m+n=k \\ m,n\geq 0}} x_m y_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{k} x_m y_{k-m}\right) \, ?$$

$$\left(= x_0 y_0 + (x_0 y_1 + x_1 y_0) + (x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0) + \cdots \right)$$

Dies gilt <u>nicht</u> immer, aber ist OK falls $\sum x_m$, $\sum y_n$ <u>absolut konvergent</u> sind.

(siehe 2.7.25 für Gegenbeispiel)

<u>Satz</u>: (2.7.26)

Falls $\sum_{m=0}^{+\infty} x_m$, $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$ abs. konv. Reihen (mit $x_m, y_n \in \mathbb{C}$) sind, ist

$$\left(\sum_{m=0}^{+\infty} x_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{k} x_m y_{k-m}\right)$$

und die rechte Seite konv. absolut.

Beispiel. (2.7.27)

Satz. $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$,

für $z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis. Es gilt

$$\exp(z)\exp(w) = \Big(\sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{z^m}{m!}}_{x_m}\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{w^n}{n!}}_{y_n}\Big)$$

$$\overset{\text{Satz 2.7.26}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

wo $\quad x_k = \sum_{m=0}^{k} \left(\frac{z^m}{m!}\right) \left(\frac{w^{k-m}}{(k-m)!}\right)$

$\qquad\qquad\qquad x_m \cdot y_{k-m}$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!\,(k-m)!} \cdot z^m \cdot w^{k-m}$$

$$= \frac{1}{k!} (z+w)^k \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

D.h. $\quad \exp(z)\exp(w) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (z+w)^k$

$$= \exp(z+w).$$

Bemerkung: (1) von $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$

und $\exp(0) = 1$, folgt

$$\exp(z) \neq 0 \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

und $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$

[weil $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(z-z) = 1$.

(2) Es gilt $\exp(n) = \exp(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}})$
$(n \geq 0)$

$$\Rightarrow \quad \exp(n) = \exp(1)\exp(\underbrace{1+\dots+1}_{n-1 \text{ mal}})$$

$$\overset{\dots}{=} \exp(1)^n = e^n$$

Und für $n \leq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, $-n \in \mathbb{N}$

$$\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n$$

Für $n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\exp(n) = e^n}$

<u>Notation:</u> $\exp(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$

Bem. Später sehen wir:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq 0 \Rightarrow \exists\, \omega \in \mathbb{C},\ \exp(\omega) = z.$$

2.8 Dezimalentwicklung

[nicht im Skript, nicht in der Prüfung]

$$e = 2{,}718281828\ldots$$
$$= 2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}, \quad \text{wo } d_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$$

hat $d_1 = 7$, $d_2 = 1$, $d_3 = 8$, ...

Wir werden sehen:

(1) jede $x \in \mathbb{R}$ hat eine Dezimalentwicklung

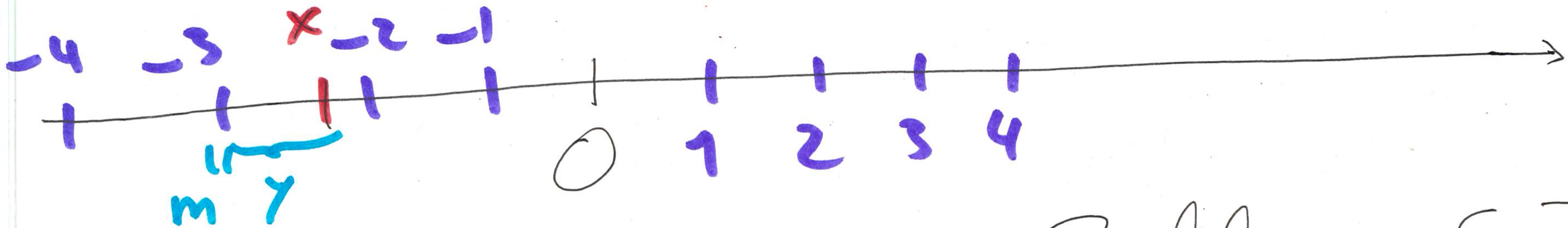
$$x = \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Z}}}{m} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}, \quad d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

(2) für jede Folge (d_k), $d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$, konvergiert (abs.) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ gegen eine reelle Zahl.

(Problem: Dezimalentwicklung ist nicht immer eindeutig:

$$0,999\ldots9\ldots = 9\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{10^k} = 1$$
)

1 – Sei $x \in \mathbb{R}$



Es gibt genau eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ sodass $m \leq x < m+1$.

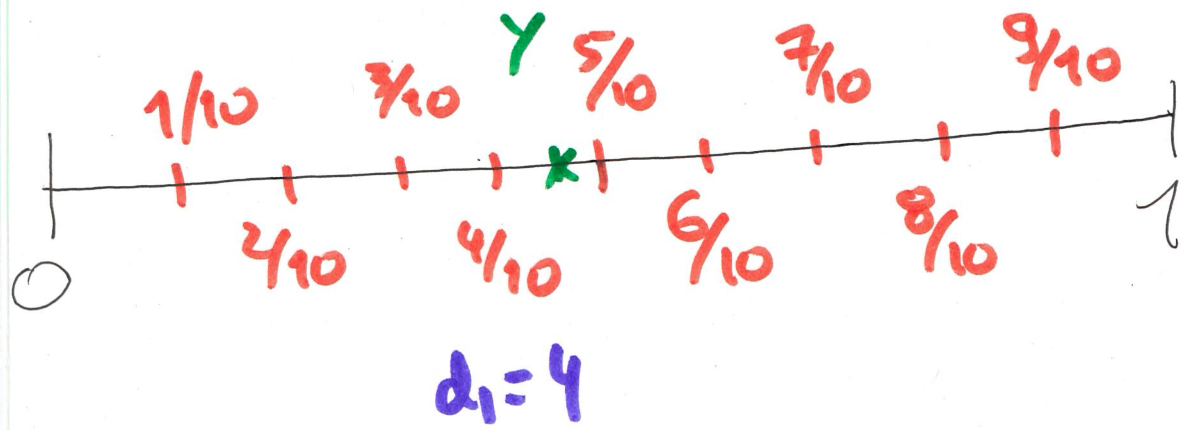
d.h. $x = m + y$

wo $0 \le y < 1$

Wir definieren d_k, $k \ge 1$, wie folgt:

$(d_k \in \{0, 1, \dots, 9\})$

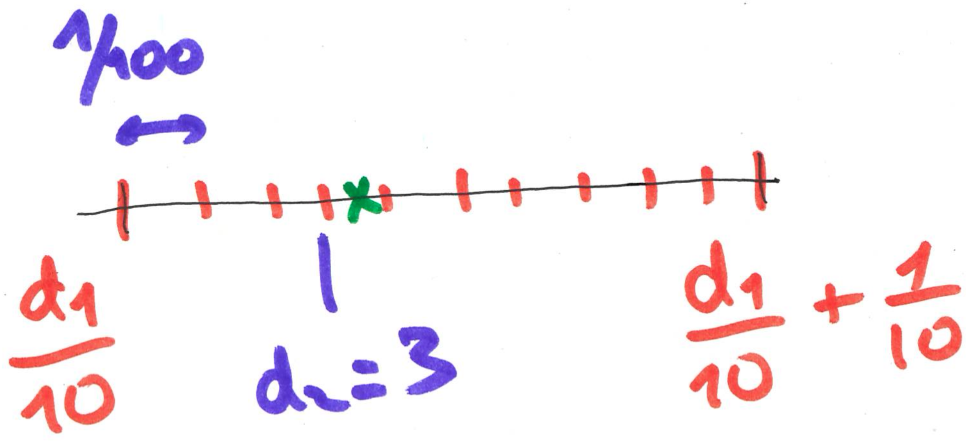
$\underline{d_1}$: die einzige Zahl sodass



$$\frac{d_1}{10} \le y < \frac{d_1}{10} + \frac{1}{10}$$

$\underline{d_2}$: die einzige Zahl sodass

$$\frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} \leq y < \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{100} + \frac{1}{100}$$



⋮

$\underline{d_k}$: die einzige Zahl sodass

(*) $$\boxed{\frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_k}{10^k} \leq y} < \underline{\qquad\qquad} + \frac{1}{10^k}$$

Wenn wir (d_k) definiert haben, gilt

$$y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}, \text{ die abs. konv. ist}$$

$$\left(\Rightarrow \quad x = m + y = m + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} \right)$$

[weil $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ hat ≥ 0 gliedern

und $(*)$ zeigt, die partielle Summen sind beschränkt $(\leq y)$.

Und von $(*)$: $\left| y - \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k} \right| < \frac{1}{10^n}$

folgt $y = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$.

2 – Sei (d_k) eine (beliebige) Folge mit $d_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ hat ≥ 0 gliedern, und wegen $\frac{d_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k}$ ist

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k} \leq 9 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k}$$

$$\leq 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots \right)$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(1 + \frac{1}{10} + \ldots \right)$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\underbrace{1 - \frac{1}{10}}_{9/10}} = 1$$

$\Rightarrow$ die partielle Summen sind ≤ 1

$\Rightarrow$ die Reihe $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$ konvergiert absolut!