Für die Bestimmung von Stammfunktionen gibt zwei wichtige Regeln:

Satz ["Partielle Integration"], (5.4.5)

Seien $a < b$, $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Notation: $[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$

Beweis.

$$(fg)' = f'g + fg'$$

(Kor. 5.4.2) $\Longrightarrow$ (+ Linearität)

$$\int_a^b (fg)'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$

$$\| $$

$$(fg)(b) - (fg)(a)$$

$$\|$$

$$f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) = \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx$$

Beispiel -

$$\int_0^1 x\, e^x \, dx$$

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' \qquad (e^x)'$$

Erste Versuch: $\begin{cases} f = \frac{x^2}{2} \\ f' = x, & g = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x e^x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^x \, dx$$

Zweite Versuch: $\begin{cases} f' = e^x, & g = x \\ f = e^x, & g' = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x e^x \, dx = \left[x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x e^x \, dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \left[e^x \right]_0^1$$
$$= 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - (e^1 - e^0)$$
$$= e - e + 1 = \underline{1}$$

<u>Satz.</u> (Substitution, 5.4.6)

$a < b$, $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $I \subset \mathbb{R}$ sodass $g([a,b]) \subset I$

Für $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_{\underline{\underline{a}}}^{\underline{\underline{b}}} f(\underline{\underline{g(y)}})\, \underline{\underline{g'(y)\, dy}} = \int_{\underline{\underline{g(a)}}}^{\underline{\underline{g(b)}}} f(\underline{\underline{x}})\, \underline{\underline{dx}}$$

$$\boxed{x = g(y) \quad \text{"}dx = g'(y)\, dy\text{"}}$$

57

Beweis:

Sei $S(t) = \int_{g(a)}^{t} f(x)\,dx$, $\quad t \in [g(a), g(b)]$

S ist eine Stammfunktion von f

(Fundamentalsatz): $S' = f$

$S \circ g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist diff.

mit $(S \circ g)'(y) = g'(y)\, S'(g(y))$

$= g'(y)\, f(g(y)) \qquad [S' = f]$

Kor. $\Longrightarrow \int_a^b \underline{(S \circ g)'(y)}\, dy = [S \circ g]_a^b$

d.h. $\int_a^b \underline{\underline{f(g(y))\, g'(y)\, dy}} = S(g(b)) - S(g(a))$

$\overset{\text{def. von } S}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt - 0$ $\square$

Wie man diese zwei Regeln benutzen soll, ist nicht immer klar...

<u>Bemerkung</u>: Das Resultat einer Berechnung von Stammfunktion kann man immer leicht / schnell überprüfen: man

kann die "Stammfunktion" ableiten und überprüfen, dass $S' = f$.

Beispiele

(1) $\int_a^b \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = \;?\quad \left(-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_a^b \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = -\int_a^b \frac{\cos'(t)\,dt}{\cos(t)}$$

gut für $x = \cos(t)$, $dx = \cos'(t)\,dt$

$$= -\int_a^b f(\cos(t)) \cdot \cos'(t)\,dt$$

wo $f(y) = 1/y$.

Substitution: $x = \cos(t)$, $dx = -\sin(t)\,dt$

$$\int_a^b \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\,dt = -\int_{\cos(a)}^{\cos(b)} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= -\log(\cos(b)) + \log(\cos(a))$$

[d.h. eine Stammfunktion von $\tan(t)$ ist $-\log(\cos(t))$, für $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.]

(2) $\quad I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$

Erste Methode: $\quad -1 \le a < b \le 1$

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\, dx \overset{\text{„Trick"}}{=} \int_a^b \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{g}\, dx \quad \text{mit } f = x$$

Part. Int.

$$= \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_a^b - \int_a^b x \cdot \underbrace{\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}_{g'}\, dx$$

$$= \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_a^b + \int_a^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

__Trick 2:__ $\boxed{x^2 = x^2 - 1 + 1}$

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_a^b - \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$\arcsin'(x)$

$$\Rightarrow 2\int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[x\sqrt{1-x^2}\right]_a^b + \left[\arcsin(x)\right]_a^b$$

D.h. eine Stammfunktion für $\sqrt{1-x^2}$ ist

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$$

Zweite Methode: $-1 \le a < b \le 1$

$$I = \int_a^b \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Substitution:

$x = \sin(t)$, $\boxed{t = \arcsin(x)}$, $\boxed{-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}}$

$dx = \cos(t)\,dt$

$= \sqrt{1-x^2}\,dt$

$\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$

$\Rightarrow$

$\cos(t) = \sqrt{1-\sin(t)^2}$

(wenn $\cos(t) \ge 0$)

$$\Rightarrow I = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \sqrt{1-\sin(t)^2}\,\cos(t)\,dt$$

$$= \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos(t)\cdot\cos(t)\,dt$$

weil $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_{\operatorname{arcsinh}(a)}^{\operatorname{arcsinh}(b)} \cos(t)^2 \, dt$$

Für $\int_\alpha^\beta \cos(t)^n \, dt$ oder $\int_\alpha^\beta \sin(t)^n \, dt$, $n \in \mathbb{N}$, kann man die Darstellung als ~~Funktion~~ Kombination von $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ benutzen, $k \in \mathbb{N}$:

$$\cos(t)^2 = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2it} + 2 + e^{-2it}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \int_\alpha^\beta \cos(t)^2\,dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \cos(2t)\,dt + \frac{1}{2}\underbrace{(\beta-\alpha)}_{=\int_\alpha^\beta 1\cdot dt}$$

Man kann immer $\int_\alpha^\beta f(cx)\,dx$ berechnen

mit der Substitution $\begin{cases} y = cx \\ dy = c\,dx \end{cases}$ $c \neq 0$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_\alpha^\beta f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int_{c\alpha}^{c\beta} f(y)\,dy}$$

$y = 2t$
$dy = 2\,dt$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \cos(t)^2\,dt = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \cos(2t)\,dt + \frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int_{2\alpha}^{2\beta} \cos(y)\,dy + \frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\sin(y)\Big]_{2\alpha}^{2\beta} + \frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\int_\alpha^\beta \cos(t)^2\,dt = \frac{1}{4}\big(\sin(2\beta) - \sin(2\alpha)\big) + \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Für $I = \int_{\arcsin(a)}^{\arcsin(b)} \cos(t)^2\,dt$ muss

67

man α, β mit $\arcsin(a)$, $\arcsin(b)$ ersetzen

usw. . . .

Sonderfälle von Substitutionen!

(1) $$\int_a^b f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(y)\,dy$$

$$\boxed{\begin{cases} y = cx \\ dy = c\,dx \end{cases}}$$

für jede f, $\underline{c \neq 0}$

(2) $$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy$$

$(c \in \mathbb{R})$

$$\boxed{\begin{cases} y = x + c \\ dy = dx \end{cases}}$$

z. B. Stammfunktion für e^{cx} ist $\frac{1}{c} e^{cx}$ $(c \neq 0)$, für $\cos(cx)$ ist $\frac{1}{c} \sin(cx)$

für $\sin(cx)$ ist $-\frac{1}{c} \cos(cx)$.

5.9 „Unbestimmte Integral"

Wenn man sucht nur ~~eine~~ die Stammfunktion von f, nicht eine gewisse $\int_a^b f(x)\,dx$, man ~~schreibt~~ bezeichnet

$$\int f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int f$$

eine Stammfunktion von f. („unbestimmte Integrale")

<u>z.B.</u> man schreibt

$$\int e^x \, dx = e^x$$

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

oder (für <u>alle</u> Stammfunktionen)

$$\int e^x \, dx = e^x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$(x > 0) \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \log(x) + C$$

Partielle Integration:

$$\int f'g = fg - \int fg'$$

(oder $\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$)

Substitution:

$$\boxed{\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(y)\, dy \quad \text{wo} \quad y = g(x)}$$

[z.B. $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{(2x)}_{g'} \underbrace{e^{x^2}}_{f\circ g} dx$, $g(x) = x^2$

$$= \frac{1}{2}\int e^y \, dy \qquad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{y = x^2} \\ dy = 2x\,dx \end{array} \right.$$

$$\boxed{\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} e^{x^2}}$$

D.h. $\frac{1}{2} e^{x^2}$ ist Stammfunktion von xe^{x^2}.

(in der Tat: $\left(\frac{1}{2} e^{x^2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{x^2}\right)'$
$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot e^{x^2} = xe^{x^2}$)

Im Skript 5.9 eine Liste von Funktionen die man integrieren kann.

1 **Polynome:**

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1$$

$$\Rightarrow \int (a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d)$$

$$= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_d}{d+1} x^{d+1}$$

2 $f(x) = x^n \cos(ax), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{oder} & x^n \sin(ax) \\ \text{oder} & x^n e^{ax} \end{array} \right.$$

Partielle Integration (n mal) $\Rightarrow$ es ist genug, den Fall $n = 0$ zu überlegen

$$\Rightarrow \quad \int \cos(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax) , \dots$$

3 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\left(x \in [a, b] \text{ sodass } q(x) \neq 0 \text{ für } a \leq x \leq b \right)$

p, q Polynome

<u>Methode:</u> f ist eine <u>lineare Kombination</u> von folgenden Arten von Funktionen:

1) Polynome

2) $\frac{a}{bx + c}$, $b \neq 0$

3) $\dfrac{ax+b}{cx^2+dx+e}$, $\begin{cases} d^2 - 4ec < 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$

Mit Linearität brauchen wir nur die Stammfunktionen dieser 3 Klassen:

1) $\int (\text{Polynom}) = \text{Polynom}$ ✓

2) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = \frac{a}{b}\int \frac{dy}{y}$

$\begin{cases} y = bx+c \\ dy = b\,dx \end{cases}$

$= \dfrac{a}{b}\left(\log(y) + C\right)$

$= \dfrac{a}{b}\left(\log(bx+c) + C\right)$

z.B. $\int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = ?$ $(x>1)$

Es gilt: $\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x\cdot(x^2-1)+x}{x^2-1}$

$$= x + \frac{x}{x^2-1}$$

Weiter ist

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}$$

Pol.

$\frac{a}{bx+c}$, $b \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x-1) + \frac{1}{2}\log(x+1) + C$$