3.8 – 3.9 – Trigonometrische Funktionen

Definition. (Trig. Funktionen)

$x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$$

Mit dem Quotientenkriterium sieht man leicht dass die Reihen konvergieren für alle $x \in \mathbb{R}$.
Als Potenzreihen ~~sind~~ haben diese Funktionen Konvergenzradius $+\infty$

$\overset{(3.7.11)}{\Longrightarrow}$ cos, sin sind stetige Funktionen

$$\cos, \sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ziel: die Eigenschaften von sin/cos, und die geom. Interpretation zu finden!

Satz (3.8.2) (Euler) $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Beweis.

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} \cdots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} \cdots$$

$$+ i\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i$

$\vdots$

78

$$= \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

D.h. $\begin{cases} \cos(x) = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) \\ \sin(x) = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = \dfrac{e^{ix} + \overline{e^{ix}}}{2} \\[2ex] \sin(x) = \dfrac{e^{ix} - \overline{e^{ix}}}{2i} \end{cases}$$

aber $(z \in \mathbb{C})$

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} = e^{\bar{z}}$$

$$\begin{cases} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \, \bar{z}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\[2ex] \sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}}$$

80

Korollar . (1) $\cos(x)^2 + \sin^2(x) = 1$

(2) **Alle** trig. Formeln:

- Darstellung von $\cos(kx)$, $k \in \mathbb{N}$ oder $\sin(kx)$ als Polynome von $\cos(x)$, $\sin(x)$
- Darstellung von $\cos(x)^k$ oder $\sin(x)^k$ als Kombination von $\cos(mx)$, $\sin(mx)$, $0 \leq m \leq k$
- $\cos(x+y) = \dots$

$\vdots$

z.B

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

z.B.

$\cos(x)^2 = \dots$

Beweis / Beispiel:

(1)

$$\cos(x)^2 + \sin(x)^2$$

$$= \left| \cos(x) + i\sin(x) \right|^2$$

Euler $\rightarrow$

$$\overset{\text{Euler}}{=} \left| e^{ix} \right|^2 = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}}$$

$$\overline{e^{z}} = e^{\overline{z}}$$

$$= e^{ix} \cdot e^{-ix}$$

$$= e^{ix-ix} = e^0 = 1$$

[**Insbesondere:** $0 \le \begin{cases} \cos^2(x) \\ \sin^2(x) \end{cases} \le 1$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x) \\ \sin(x) \end{cases} \in [-1, 1]$]

(2) z. B.

$$\sin(3x) = \operatorname{Im}\left(e^{3ix}\right)$$

$\sin(kx)$

$$= \operatorname{Im}\left(\left(e^{ix}\right)^3\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^3\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^k\right)$$

$$= \operatorname{Im}\Big(\cos(x)^3 + 3\cos(x)^2 i\sin(x) + 3\cos(x)\left(i\sin(x)\right)^2 + \left(i\sin(x)\right)^3\Big)$$

$$= 3\cos(x)^2\sin(x) - \sin(x)^3$$

83

oder

$$(e^{z})^{n} = e^{nz}$$

$$\cos(x)^3 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\Big(e^{3ix} + 3e^{2ix}\cdot e^{-ix} + 3e^{ix}\cdot e^{-2ix} + e^{-3ix}\Big)$$

$$= \frac{1}{8}\Big(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

Oder:

$$\cos(x+y) = \mathrm{Re}\left(e^{i(x+y)}\right)$$

$$\sin(x+y) = \mathrm{Im}\left(e^{i(x+y)}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{ix} \cdot e^{iy}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(e^{ix} \cdot e^{iy}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\cos(x)\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left(\cos(x)\cos(y) + i\cos(x)\sin(y) + i\sin(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\right)$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$= \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

Satz (3.9.1)

Es gibt genau eine reelle Zahl

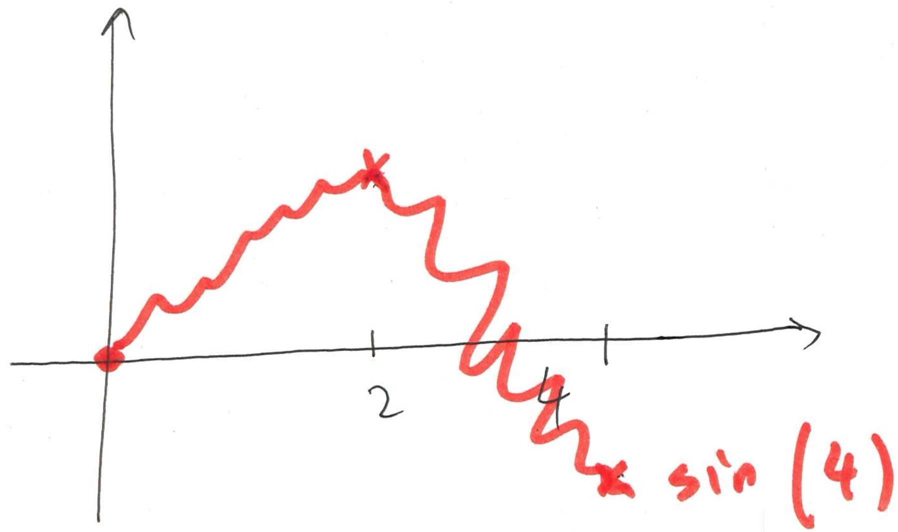
$$\pi \in \,]0, 4[$$

mit

$$\sin(\pi) = 0 .$$

Idee: man überprüft dass die Funktion sinus erfüllt:

$$\begin{cases} \sin(4) < 0 \\ \sin(x) > 0, \quad x \in \,]0,2] \end{cases}$$



Zwischenwertsatz

$\Longrightarrow$ es gibt mindestens eine $x_0 \in]2,4[$ mit $\sin(x_0) = 0$.

Man definiert:

$$\pi = \boxed{\mathrm{Inf}\,\{x_0 \in [2,4] \mid \sin(x_0) = 0\}}$$

und überprüft dass diese Zahl π erfüllt die gewunschte Eigenschaften.

Weitere Eigenschaften!

(1) $$0 = \sin(\pi) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{>0 \\ \text{weil } \frac{\pi}{2} \in]0,2[}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \underset{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)>0\right)}{\Longrightarrow} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

d.h. $$\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 + i = i}$$

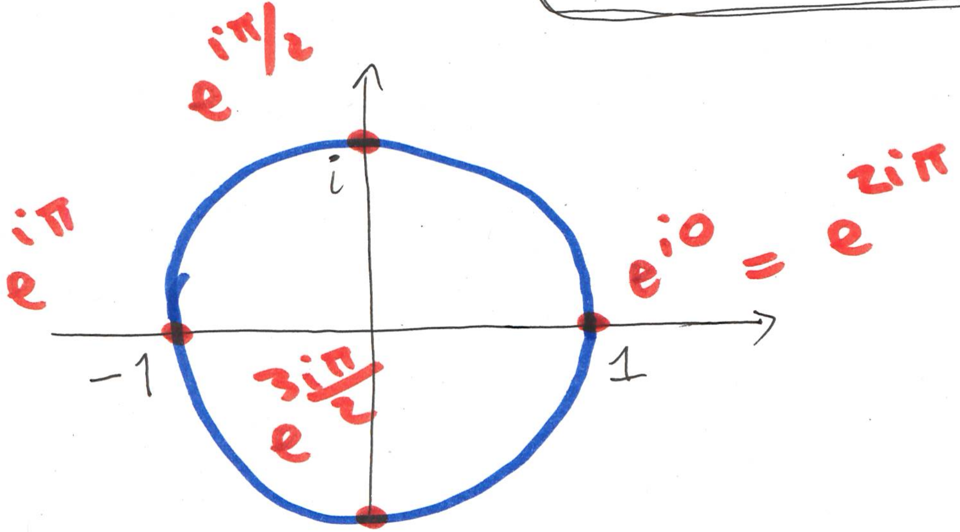
(2) $\cos(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

$= 0 - 1 = -1$

d. h. $\boxed{e^{i\pi} = -1}$ (oder $e^{i\pi} = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1$)

(3) $\boxed{e^{2i\pi} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = 1}$ und ($e^{\frac{3i\pi}{2}} = \left(e^{i\pi/2}\right)^3 = i^3 = -i$]



(4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+2\pi) + i\sin(x+2\pi)$

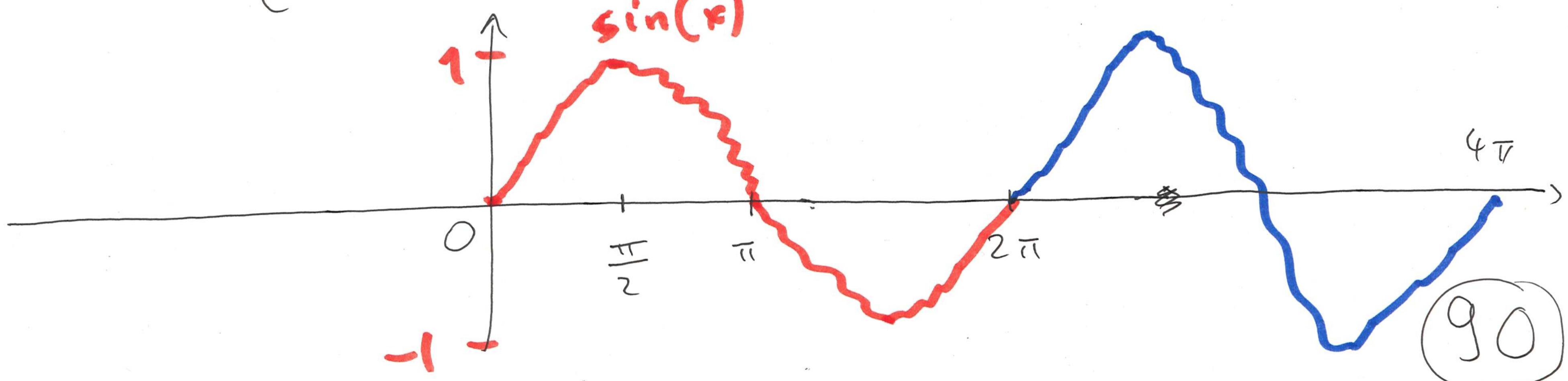
$$= e^{i(x+2\pi)}$$

$$= e^{ix} \cdot e^{2i\pi} = e^{ix}$$

$e^{2i\pi} = 1$

$$= \cos(x) + i\sin(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) = \sin(x) \end{cases}$$



90

Genauere Information kommt im Kapitel 4, und das

π = Flächeninhalt vom Kreis mit Radius 1

im Kapitel 5.

<u>Kor.</u> Das Bild von cosinus auf $[0, \pi]$ und von sinus auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist $[-1, 1]$.

__Beweis.__ cosinus ist auf $[0, \pi]$ stetig, $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$

$\Rightarrow$ Zwischenwertsatz gibt das Resultat.

Ähnlicherweise für sinus.

3.10 Grenzwerte von Funktionen

Ziel: wir studieren $f(x)$, als x "strebt gegen" x_0, wo f nicht definiert ist.

z.B. $\dfrac{\sin(x)}{x}$ als $\underset{x>0}{\cancel{x}}$ "kleiner und kleiner" ist,

d.h. "$x \xrightarrow[x>0]{} 0$"

Viele Möglichkeiten!

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) \,?$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = ?$$

(kann eine Zahl oder $+\infty$ oder $-\infty$ sein)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \,?$$

(kann auch eine Zahl oder $+\infty$, $-\infty$, sein)

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} \,?$$

Beispiele von Def.

1. $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to b} f(x) = y \in \mathbb{R}$$ (" f konvergiert gegen y als $x \longrightarrow b$, $x<b$ ")

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [a, b[,$$
$$|x - b| < \delta \Longrightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

2. $$\lim_{x \to b} f(x) = +\infty \iff$$
$$\forall T > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in [a, b[,$$
$$|x - b| < \delta \Longrightarrow f(x) > T$$

z.B. 1 $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots \right) \right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \dots \right)$$

$$= 1$$

$\Big(= g(0)$ mit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$,

die stetig ist $\Big)$

2 $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{-1}{x} \right) = +\infty$

3 $f:]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = y \text{ oder } +\infty \text{ oder } -\infty$$

$$\Updownarrow$$

. . . . . .

4 ~~lim~~ $f: [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y \in \mathbb{R}$ ("f konvergiert gegen y als $x \to +\infty$")

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists T \geq a, \forall x \geq T, |f(x) - y| < \varepsilon$

5 $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall T > 0,\ \exists S \geq 0,\ \forall x \geq S \Rightarrow f(x) > T$$

(usw....)

Kriterium:

[x_0, y können reelle Zahlen, $+\infty$ oder $-\infty$ sein]

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y$$

$$\Updownarrow$$

für alle Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$, wo a_n gehört die Def. menge von f, sodass

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0}$$

es folgt

$$\boxed{f(a_n) \longrightarrow y}$$

Beispiele:

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Satz – (1) Falls f an x_0 **stetig** ist, folgt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$$

(siehe Satz 3.2.4)

(2) Falls

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} y \quad \left(\Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = y \right)$$

<u>und</u> $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$

ist stetig, $x_0 \in J$, J Intervall

$$\Longrightarrow \quad g(f(x)) \xrightarrow[x \to x_0]{} g(y)$$

(3) Summen, Produkte, ... : wie für Folgen

(z.B. $\lim (f_1(x) + f_2(x)) = \lim f_1(x) + \lim f_2(x)$
(wenn beide existieren...))

Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^a e^{-x} = 0 \quad , \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

("exponential wachst viel schneller als jede Potenzfunktion")