$$\Rightarrow \int \frac{x^3}{x^2-1}\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log(x-1) + \frac{1}{2}\log(x+1) + C$$

3) $$f(x) = \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\,, \quad c \neq 0, \quad \boxed{d^2-4ec<0}$$

$$\int \frac{ax+b}{cx^2+dx+e}\,dx = \int \frac{a\left(y-\frac{d}{2c}\right)+b}{c\,(y^2+\alpha)}\,dy$$

$$cx^2+dx+e = c\left(\left(x+\frac{d}{2c}\right)^2 + \underbrace{\frac{e}{c}-\frac{d^2}{4c^2}}_{\alpha\;>\;0}\right)$$

Substitutia

$y = x + \frac{d}{2c}$

$x = y - d/2c$

$dy = dx$

77

Substitution: $y = w\sqrt{\alpha}$ $\quad \left(\Longrightarrow \; y^2 = \alpha w^2 \right.$

$dy = \sqrt{\alpha}\, dw \qquad \left. y^2 + \alpha = \alpha(w^2+1) \right)$

$$\ldots = \sqrt{\alpha} \int \frac{a\left(w\sqrt{\alpha} - \frac{d}{2c}\right) + b}{c\alpha\,(w^2+1)}\, dw$$

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\int \frac{w}{w^2+1}\, dw} \quad \text{und} \quad \boxed{\int \frac{dw}{w^2+1}}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2w}{w^2+1}\, dw = \frac{1}{2} \log(w^2+1) \qquad \arctan(w)$$

[Substitution: $u = w^2$]

Beispiel.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} \qquad 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 < 0$$

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}$$
$$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$y = x + \frac{1}{2}$:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dy}{y^2+3/4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}(w^2+1)}\, dw$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} w \implies y^2 = \frac{3}{4} w^2$$
$$dy = \frac{\sqrt{3}}{2}\, dw$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3} \arctan(w) \qquad \boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{2} w}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) \qquad \boxed{y = x + \frac{1}{2}}$$

Weitere Klassen von Funktionen die eine "explizite" Stammfunktion finden sie im Skript (§ 5.9).

5.5. <u>Integration von Funktionenfolgen</u>

Falls $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, und jede f_n ist integrierbar, ist f auch integrierbar?

<u>Satz.</u> (5.5.1) $a < b$, $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig für $n \geq 0$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Falls $f_n \longrightarrow f$ <u>gleichmässig</u> auf $[a,b]$, dann ist f ~~ist~~ stetig und

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$$

(eine Vertauschung von Grenzwerte)

Für eine Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

bedeutet dies:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

(wenn die konv. ist gleichmässig).

<u>Beweis</u>. Sei $M_n = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - f_n(x)|$.

Gleichmässige Konv. $f_n \longrightarrow f$ bedeutet genau

$$\lim_{n \to \infty} M_n = 0$$

Für $a \leq x \leq b$ gilt

$$|f(x) - f_n(x)| \leq M_n$$

Dreiecksungl-
-eichung

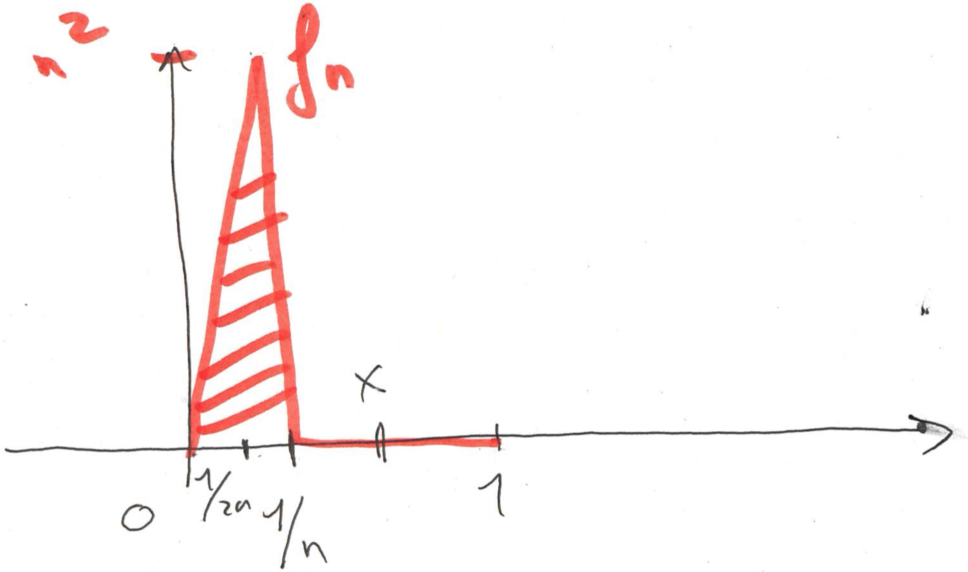
$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right|$$

$$= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leq M_n}\,dx$$

$$\leq \underbrace{M_n(b-a)}_{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 0}}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$$

Bemerkung: ohne zusätzliche Bedingungen, ist die Konvergenz $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ nicht genug:



$a = 0, \quad b = 1$

Dann gilt

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{2}$$

und $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0,\ n > \frac{1}{x} \end{cases} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$(x \in [0,1])$

sodass $\lim \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 (\lim f_n(x))$ in diesem Fall.

<u>Kor.</u> Falls $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ hat Konvergenzradius $r > 0$, und $0 \leq |x| < r$ ist

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}_{\int_0^x a_n x^n\,dx} .$$

Beispiel.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad ; \quad r = 1$$

$$\Longrightarrow \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$\boxed{(|x| < 1)}$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt$$

$$= \left[-\log(1-t)\right]_0^x$$

$$= -\log(1-x) - (-\log(1))$$

$$= \log\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

5.6. Approximation von Summen

Frage: $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

f wachsend, $f \geq 0$

$S_n = f(1) + \dots + f(n) = ?$

oder wie gross ungefähr ist diese Zahl?

[Beispiel: $f(x) = \log(x)$,

$S_n = \log(n!)$]

Mit Integralen kann man viele solche Fragen <u>sehr genau</u> antworten.

<u>Beispiel:</u> in § 5.7

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \overbrace{\exp\left(\frac{1}{12n} + F_n\right)}^{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$$

wo $\quad |F_n| \le \dfrac{\sqrt{3}}{216\, n}, \quad n \geq 1.$

$$|F_n| \to 0$$

Wir nehmen an:

$$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f \geq 0$$

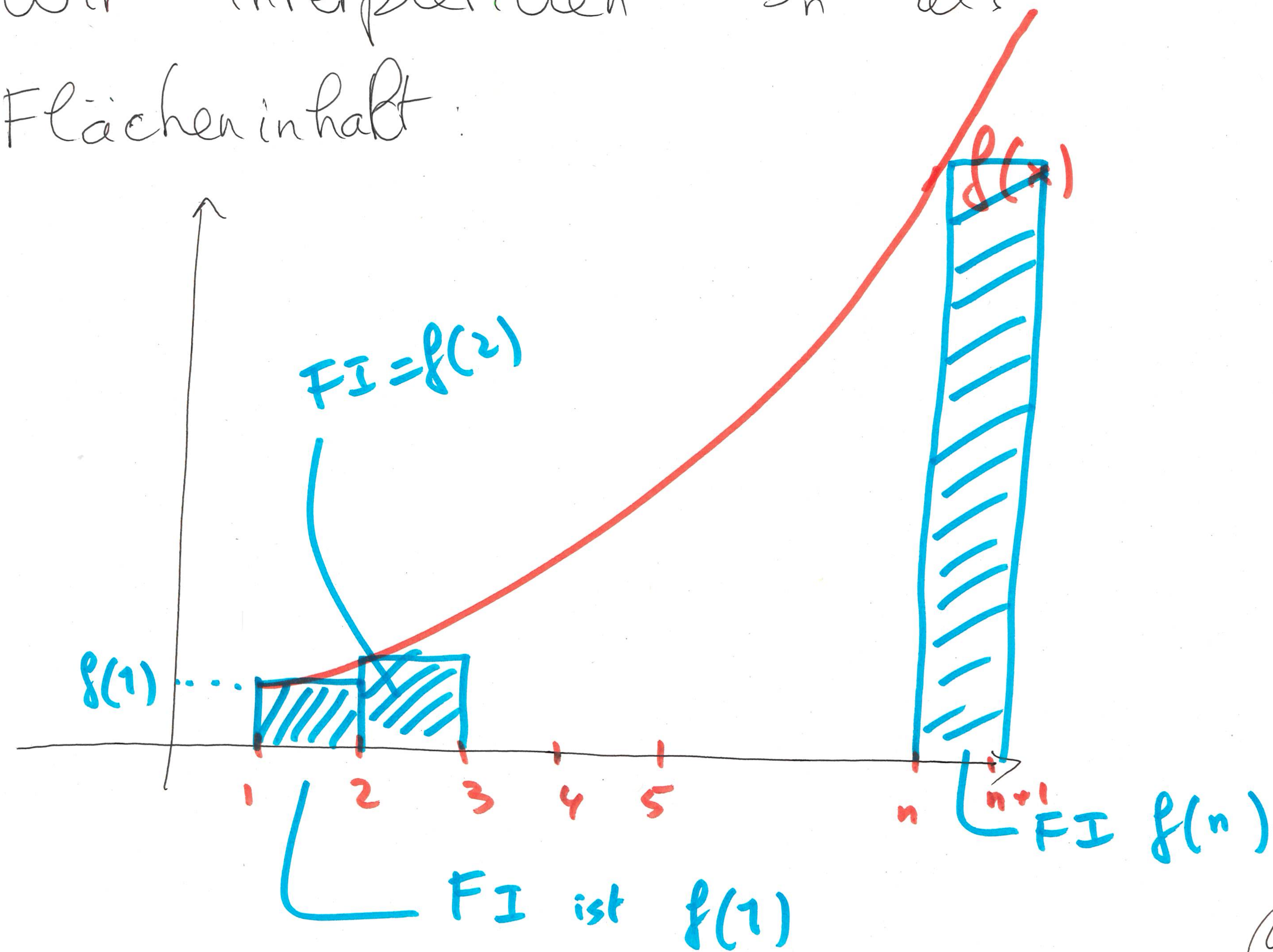
f ist wachsend

$$S_n = f(1) + \dots + f(n) \longrightarrow +\infty$$

[z.B. $f(n) = \log(n)$, $f(n) = n^a$, $a \geq 0$]

Idee: S_n mit $\int_1^n f(t)\,dt$ vergleichen.

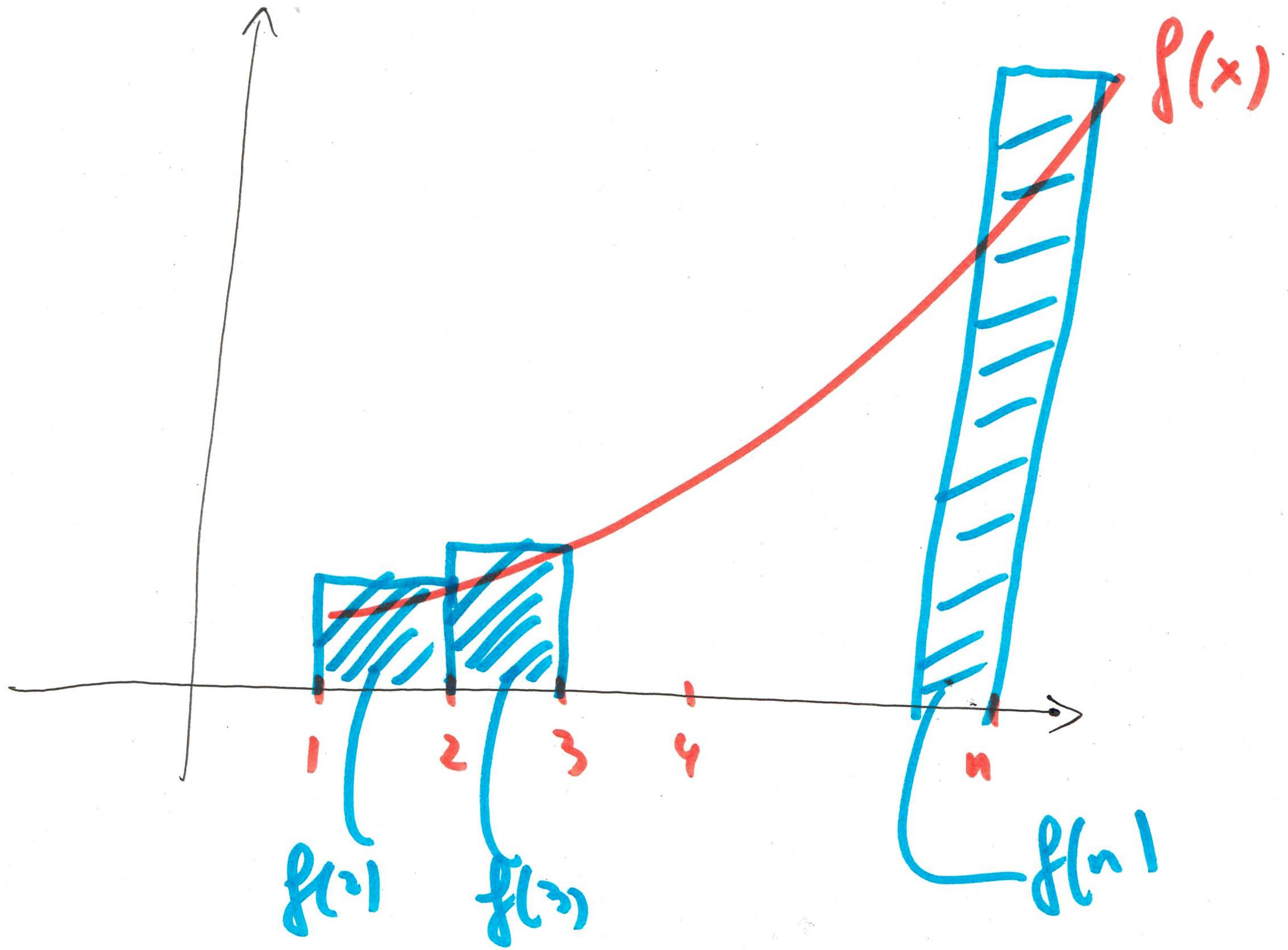
Wir interpretieren S_n als Flächeninhalt:



Wir sehen dass

$$S_n \leq \int_1^{n+1} f(t)\,dt$$

<u>und</u>



$$S_n - f(1) \geq \int_1^n f(t)\,dt$$

D. h.

$$\int_1^n f(t)\,dt - f(1) \leq S_n \leq \int_1^{n+1} f(t)\,dt$$

<u>Beispiele</u>. (1) $f(x) = x^a, \quad a \geq 0$

$$\int_1^n f(x)\,dx = \frac{x^{a+1} - 1}{a+1}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{n^{a+1} - 1}{a+1} - 1 \leq 1^a + \dots + n^a$$

$$\leq \frac{(n+1)^{a+1} - 1}{a+1}$$

Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^a + \cdots + n^a}{\left(\frac{n^{a+1}}{a+1}\right)} = 1$$

$$\left(\text{weil} \quad \frac{(n+1)^{a+1}}{n^{a+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{a+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\right)$$

$$\left[\ \underline{\text{z.B.}} \quad 1^e + \cdots + n^e \approx \frac{n^{e+1}}{e+1}\ \right]$$

(2) $\quad f(x) = \log(x), \qquad S_n = \log(n!)$

Es gilt: $\displaystyle\int_1^n \log(t)\,dt = \Big[x\log(x) - x\Big]_1^n = (n\log n - n) - (-1)$

$$= n\log(n) - n + 1$$

weil $\int \log(x)\,dx = x\log x - x$

$$\left[\ \int \log(x)\,dx = \int 1\cdot\log(x)\,dx = x\log(x) - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = x\log(x) - x\ \right]$$

$\Longrightarrow$

$$n\log(n) - n + 1 + 0 \leq \log(n!) \leq (n+1)\log(n+1) - (n+1) + 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n!)}{n\log(n) - n} = 1$$

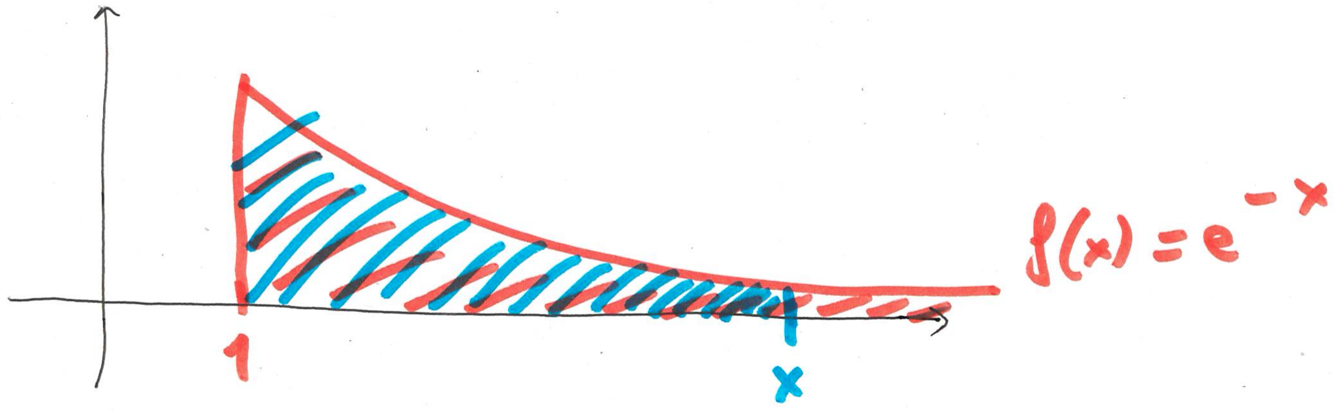
(<u>D.h.</u> $n!$ ist "ungefähr" $\exp(n\log(n)-n) = \left(\frac{n}{e}\right)^n$)

Die Approximationen von $n!$ heissen "Stirlingsche Formeln".

5.8. Uneigentliche Integrale

<u>Frage:</u> $\int_0^1 f(x)\,dx = ?$ $f:]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = ?$ $f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$



$$X_f = \{(x,y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq e^{-x}\}$$

Hat X_f ein Flächeninhalt?

<u>Definition</u> - $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ oder $]a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ (mit $b = +\infty$ oder $a = -\infty$ erlaubt sind) ist ~~auf~~ integrierbar wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)\,dt$$

existiert.

Man bezeichnet

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim \int_a^x f$$

$$\text{oder} \quad \lim \int_x^b f$$

(und sagt dass das "uneigentliches" Integral auf $[a,b]$ <u>konvergiert</u>).

<u>Beispiel</u> - $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = ?$

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$$

<u>Hilfsatz</u>. $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$

(1) Falls $|f(x)| \leq g(x)$ <u>und</u> $\int_a^b g$ existiert, existiert auch $\int_a^b f(t)\, dt$, mit

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b g(t)\, dt$$

(2) Falls $f(x) \geq g(x) \geq 0$ und $\int_a^b g$ existiert <u>nicht</u>, dann existiert <u>nicht</u> $\int_a^b f$.

Beispiele.

(1) $f(x) = e^{-cx}$, $c > 0$, ist auf $[a, +\infty[$ integrierbar

(2) $f(x) = \frac{1}{x^{a}}$ ist auf $[1, +\infty[$ integrierbar $\Longleftrightarrow$ $a > 1$

[z.B. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ existiert]

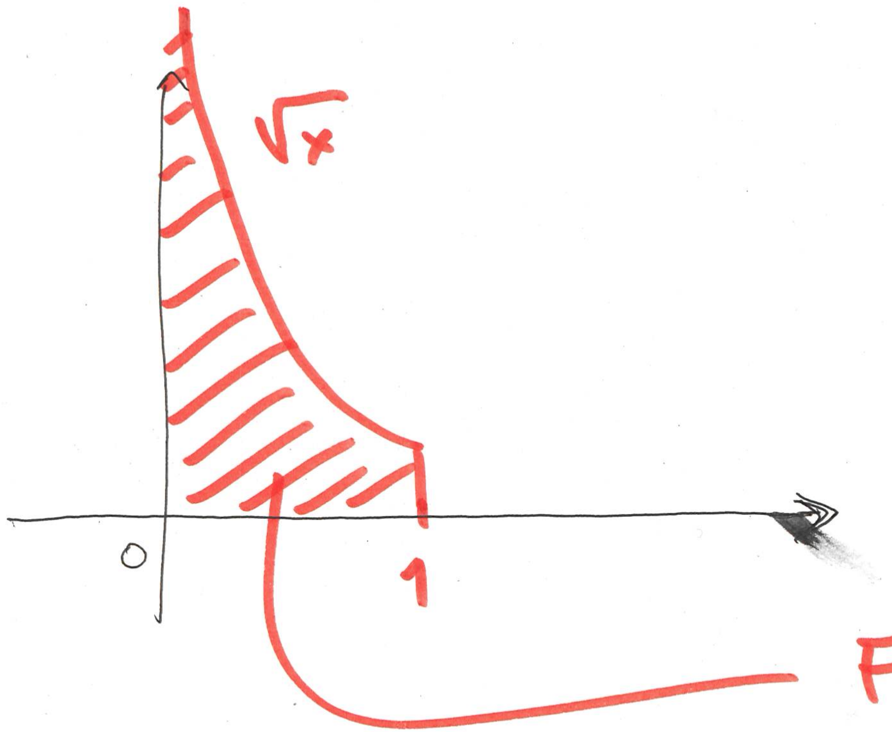
Man sieht $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx = \frac{1}{a-1}$

(3) $f(x) = \frac{1}{x^a}$ ist auf $]0, 1]$ integrierbar

$\Longleftrightarrow \quad a < 1$

[<u>z. B.</u> $\quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = ?$

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \left[2\sqrt{t} \right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 2 \;]$$



FI = 2

(<u>aber</u> $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ existiert nicht)

Satz. (5.8.5)

Sei $f: [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$, monoton **fallend**.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ konvergiert

$$\Updownarrow$$

$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ ______

Beispiel. $\underline{a > 0}$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} \quad \text{existiert oder nicht?}$$

Wir vergleichen mit

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\log t)^a}\, dt$$

$$\int_2^{x} \frac{1}{t(\log t)^a}\, dt = \int_{\log(2)}^{\log(x)} \frac{1}{y^a}\, dy$$

$$\left(y = \log(t), \quad dy = \frac{dt}{t} \right)$$

Aus Beispiel (2) folgt, dass

$$\int_{\log(2)}^{+\infty} \frac{1}{y^a}\,dy$$

existiert ~~gen~~ $\iff a > 1$.

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)^a} \text{ existiert} \iff a > 1$$

z.B. $\sum \frac{1}{n\log(n)}$ existiert nicht

aber $\sum \frac{1}{n\log(n)^2}$ ———— !