Kapitel IV

Differentialrechnung

Motivation: f stetig

$\Longleftrightarrow$ ("x nah x_0" $\Rightarrow$ "$f(x)$ nah $f(x_0)$")

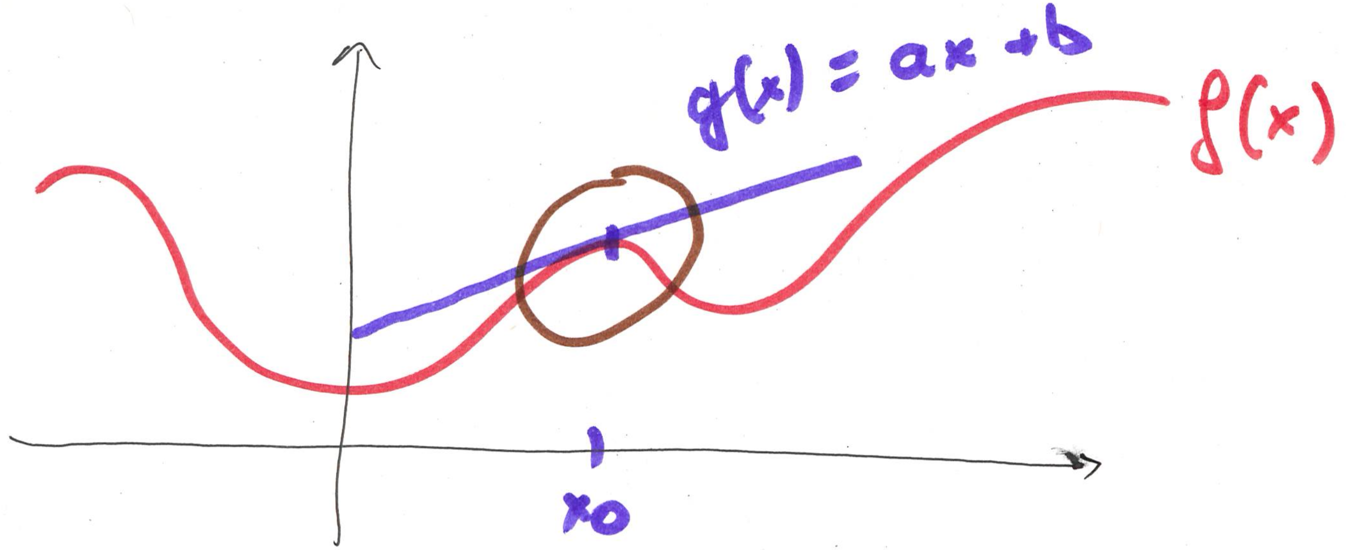
Aber die Def. gibt keine "quantitative" Version.

Wir werden eine Klasse von Funktionen definieren, die stetig und <u>und</u>

solche "quantitative" Information bringen.
Diese sind die <u>differenzierbare</u> Funktionen; sie sind die Funktionen die "sehr gut" mit Abbildungen der Form

$$g(x) = ax + b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

approximiert sind.



In der Nähe von $(x_0, f(x_0))$ kann man $f(x)$, $g(x)$ nicht genau unterschieden mit gewisse Genauigkeit.

Was sind a, b?

~~Wir können a, b berechnen mit der Gleichung~~

Wir wollen, dass

$$g(x_0) = f(x_0)$$

d.h. $\boxed{a x_0 + b = f(x_0)}$

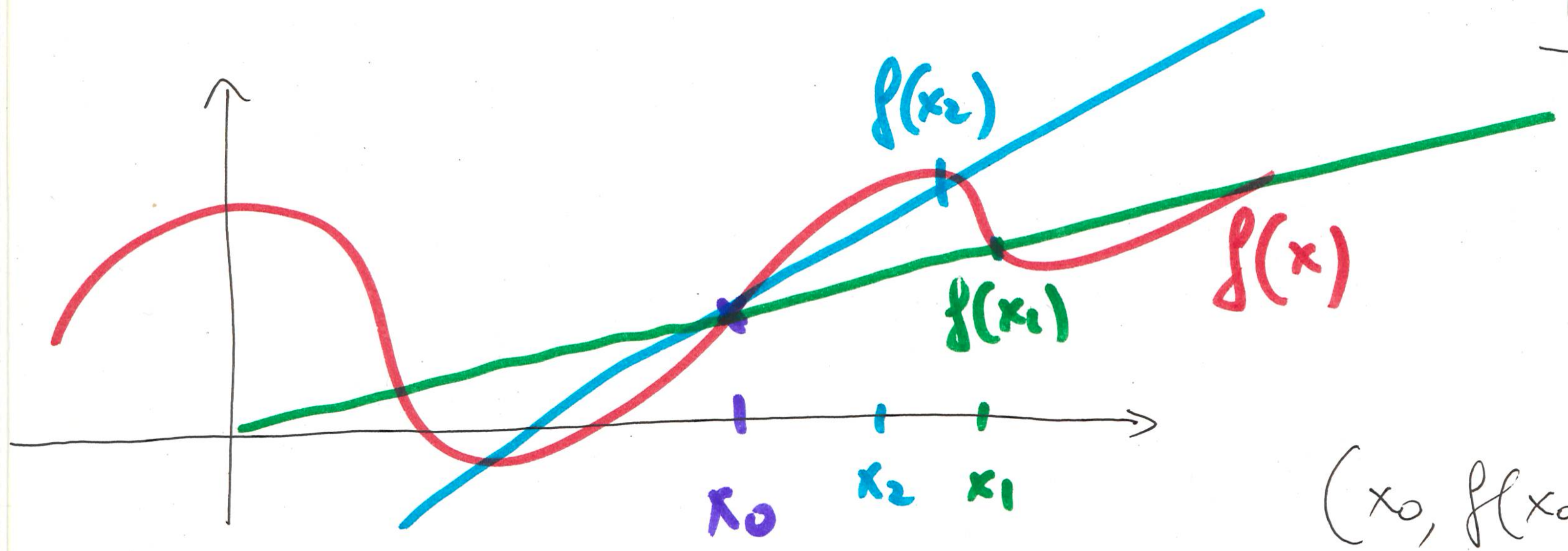
Die Zahl a wird definiert als die **Ableitung von f an der Stelle x_0.**

Anwendungen: (1) Berechnung der Stellen wo f hat ein Max./Min.

(2) Einfaches Kriterium für f wachsend/fallend

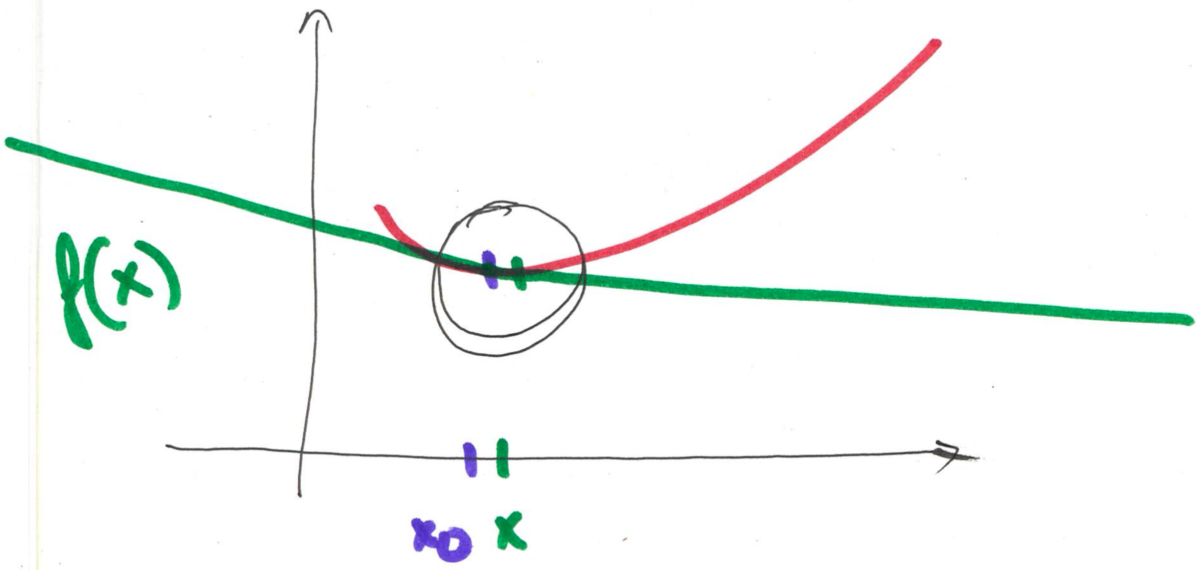
(3) **Physik:** die Ableitung berechnet die Geschwindigkeit einem Teilchen, die zweite, die Beschleunigung, ...

4.1 _ Definition / Eigenschaften der Ableitung



Geraden durch $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$

$x \neq x_0$



Besser Approximation wenn x naher von x_0 ist.

Mann kann $x = x_0$ nicht nehmen (weil es gibt dann unendlich viele Geraden). Anstatt $x = x_0$ zu nehmen, überlegen wir den Grenzwert als $x \to x_0$.

__Definition__ - (4.1.1)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall

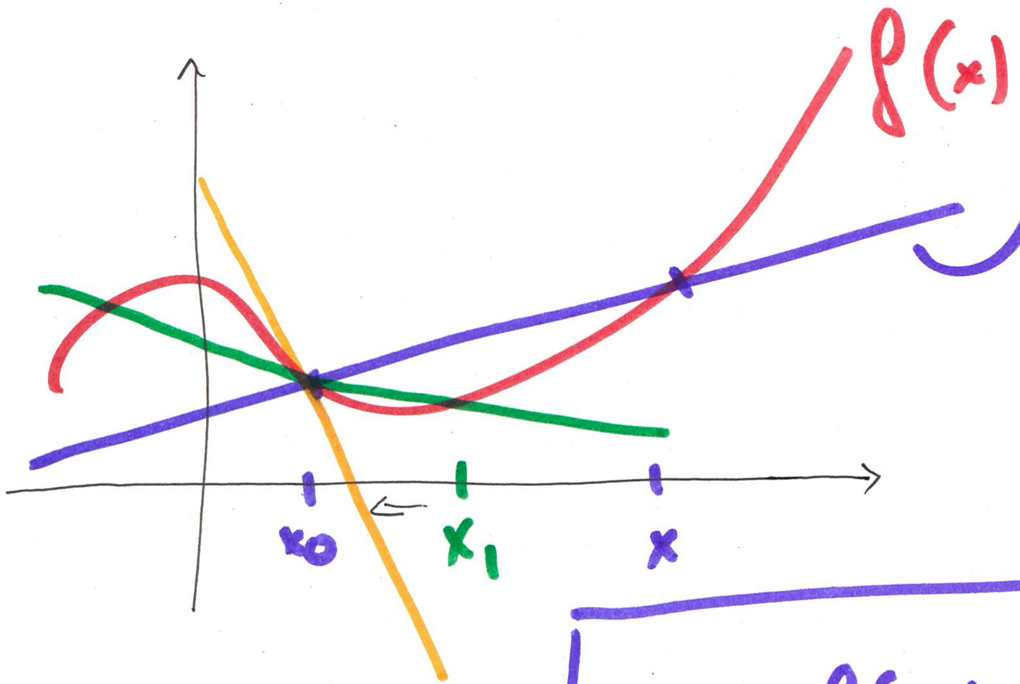
$x_0 \in I$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Die __Ableitung__ von f an x_0 ist, wenn er existiert, der Grenzwert als $\begin{cases} x \in I \\ x \longrightarrow x_0 \end{cases}$ der Steigung der Gerade in der Ebene durch $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$

Wenn sie existiert, bezeichnet man $\boxed{f'(x_0)}$

D.R. $\displaystyle\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$



hat die Gleichung

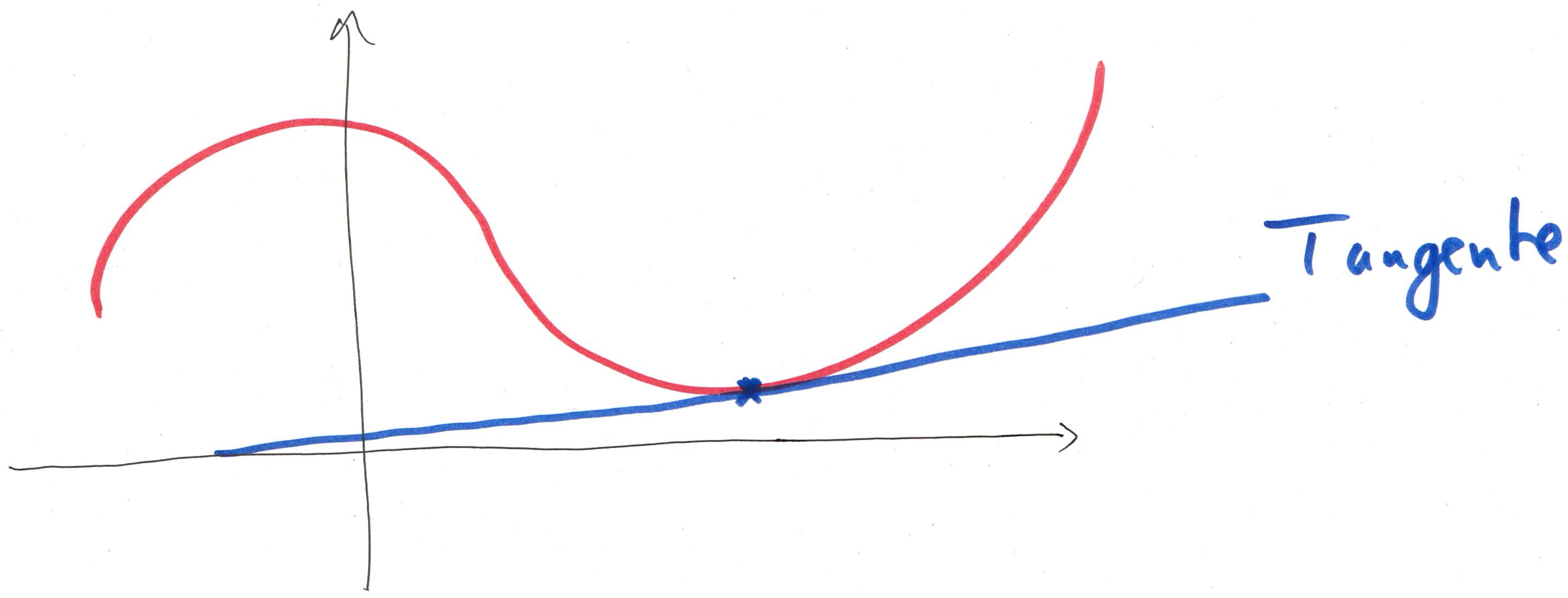
in Koord. (u,v)

$$\boxed{v - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(u - x_0)}$$

Die Gerade mit der Gleichung

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

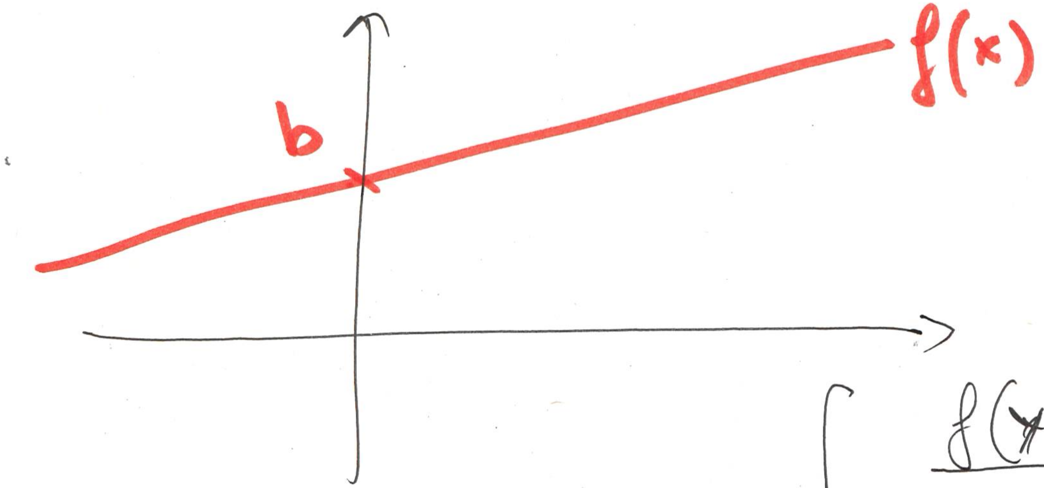
heisst die <u>Tangente</u> vom Graph von f an $(x_0, f(x_0))$.



Man sagt dass f an x_0 differenzierbar ist wenn $f'(x_0)$ existiert.

Falls $f'(x_0)$ existiert für <u>alle</u> $x_0 \in I$, ist f <u>differenzierbar auf I.</u>

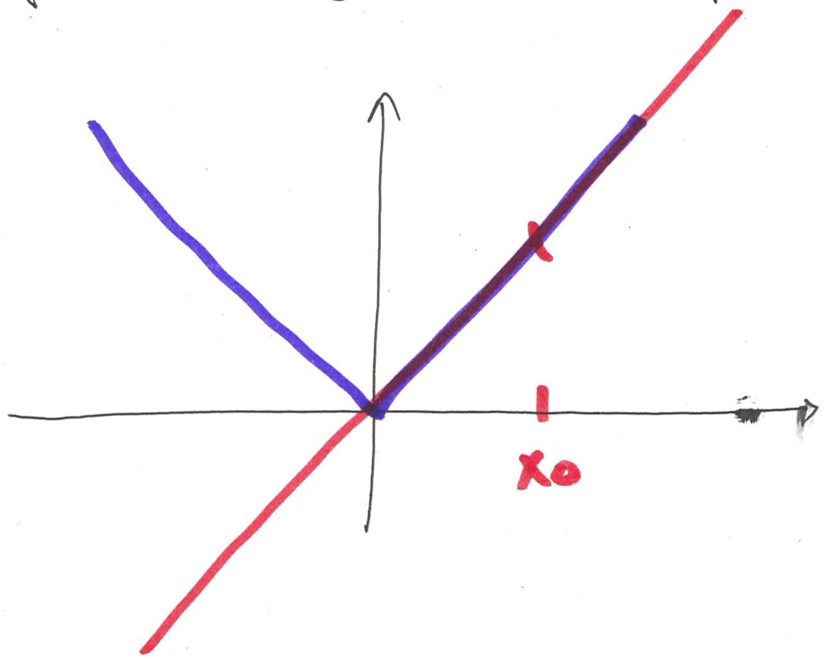
<u>Beispiele</u>. (1) $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$



$\Rightarrow f$ ist differenzierbar mit $f'(x) = a$, $\forall x$

$$\left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{a(y-x)}{y-x} = a \right]$$

(2) $f(x) = |x|$; für $x_0 \neq 0$, hat f eine Ableitung an x_0:

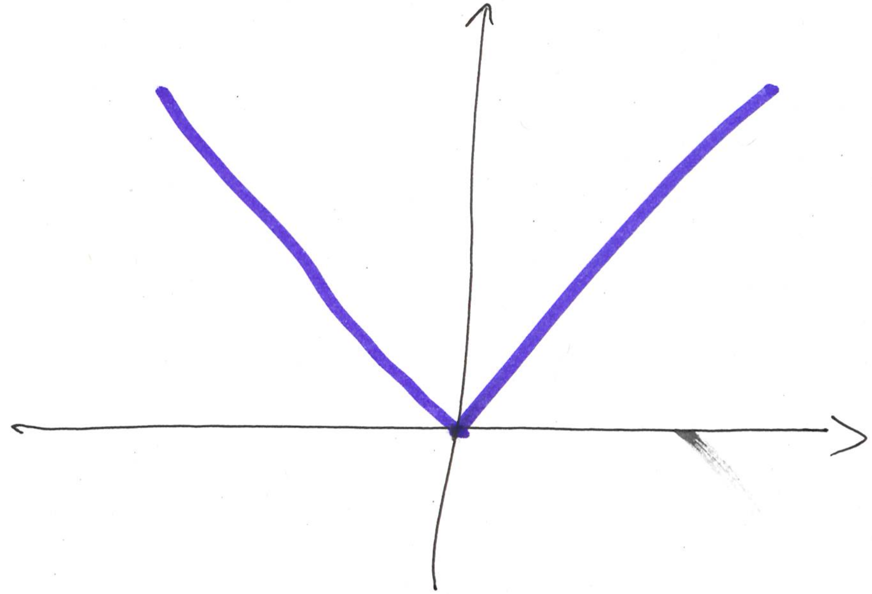


$$f'(x_0) = \begin{cases} 1, & x_0 > 0, \\ -1, & x_0 < 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0}, \text{ falls } \begin{cases} x_0 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \right.$$

$$\left. = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \right]$$

Für $x_0 = 0$, im Gegenteil, gibt es **keine** Ableitung:



$(x \neq 0)$ $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ kein Grenzwert als $x \to 0$

Mann kann Beispiele geben von $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, stetig, sodass $f'(x_0)$ existiert für <u>keine</u> $x_0 \in \mathbb{R}$ (Skript, Seite 72).

$\rightsquigarrow$ "Brownsche Bewegung"

<u>Bemerkung.</u> $$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad |x - x_0| < \delta, \quad \begin{matrix} x \in I \\ x \neq x_0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Satz – $\left(\begin{matrix}4.19\\4.1.11\end{matrix}\right)$ $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \cancel{\mathbb{R}}\, I$

$f_1, f_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$

Hyp. f_1, f_2 sind an x_0 differenzierbar

(1) $f_1 + f_2$ ist an x_0 ____________

mit $(f_1 + f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0)$

(2) $f_1 \cdot f_2$ ist an x_0 ____________

mit $(f_1 f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0)$

("Leibnizsche Formel")

[falls $f_1 = b$, Konstante, $f_1' = 0$; $(b f_2)' = b f_2'$]

(3) Falls $f_2(x_0) \neq 0$, ist $f_2(x) \neq 0$ für x nah genug von x_0, und

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x_0) = \frac{f_1'(x_0)\, f_2(x_0) - f_1(x_0)\, f_2'(x_0)}{f_2(x_0)^2}$$

[Insb. für $f_1 = 1$, $f_1'(x_0) = 0$, folgt

$$\left(\frac{1}{f_2}\right)' = -\frac{f_2'(x_0)}{f_2(x_0)^2}$$]

(4) Falls $f : I \longrightarrow J$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$

f an x_0 differenzierbar, g an $f(x_0)$ differenzierbar, ist $g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ an x_0 ______

mit $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)\; g'(f(x_0))$

Ideen für (2) und (4):

(2) $$\frac{f_1 f_2(x) - f_1 f_2(x_0)}{x - x_0} = \frac{\left(f_1(x) - f_1(x_0)\right) f_2(x) + f_1(x_0)\left(f_2(x) - f_2(x_0)\right)}{x - x_0}$$

$$\xrightarrow[x \to x_0]{} \boxed{f_1'(x_0) \cdot \underline{\underline{f_2(x_0)}} + f_1(x_0)\, f_2'(x_0)}$$

(4) $$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$$

$$= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \boxed{\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)_{\neq}}} \cdot f'(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0)$$

$$\frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \xrightarrow{y \to f(x_0)} g'(f(x_0))$$

$(y = f(x))$

$$x \to x_0 \Downarrow y = f(x) \to f(x_0)$$

Bemerkung: wir haben benutzt, dass f differenzierbar an x_0

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{f \text{ stetig an } x_0 \text{ ist}}$

D. h. $\boxed{f \text{ differenzierbar} \Longrightarrow f \text{ stetig}}$

Beispiel.

(1) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und

$\forall x$, $f'(x) = n x^{n-1}$ ($= 0$ für $n = 0$)

[<u>Beweis</u>: Induktion über n:

$n = 0$, $n = 1$ $\rightsquigarrow$ ok weil f ist lineare Abbildung

Falls $(x^n)' = n x^{n-1}$, folgt

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)'$$

Leibniz
$$= (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x'$$

$$= (n x^{n-1}) \cdot x + x^n \cdot 1$$

$$= (n+1)\, x^n .$$

$\Rightarrow$ für ein Polynom

$$f(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 ,$$

$$\begin{cases} a_i \in \mathbb{R} \\ d \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = d a_d x^{d-1} + \dots + 2a_2 x + a_1$$

(auch ein Polynom)

(2) $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, p, q Polynome mit $q(x) \neq 0$ für $x \in I$

$\longrightarrow$ f ist differenzierbar

z. B. $\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Satz. exp, sin, cos sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar, mit

$\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$,

$\cos' = -\sin$

"Intuitive" Erklärung:

exp, sin, cos sind definiert als Summen von (konvergenten) Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Solche f sehen wie "Polynome vom Grad $+\infty$" aus.

[Die Ableitung existiert und ist wie für Polynome berechnet.

z. B.

$$(\exp)'(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots\right)'$$

$$= 0 + 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + \dots + \frac{n x^{n-1}}{n!} + \dots$$

$$= 1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

$$= \exp(x).$$

$$(\sin)'(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right)'$$

$$= 1 - \frac{3x^2}{6} + \dots + \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$= \cos(x)$$

<u>Satz</u>: (4.1.12)

$f: I \longrightarrow J$, I, J Intervalle in $\mathbb{R}$

<u>Hyp.</u> f stetig + bijektiv, differenzierbar mit $\boxed{f'(x_0) \neq 0}$ für $x_0 \in I$

Die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \longrightarrow I$ ist dann auch auf J differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$(y \in J)$

Warum diese Formel? $(f \circ g)' = g' \cdot f' \circ g$

$$(f^{-1} \circ f)(x) \overset{!}{=} x$$

Ableitung: $1 = f'(x)\,(f^{-1})'(f(x))$

(Kettenregel, falls f^{-1} diff. ist)

$$\Longrightarrow \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Sei $y = f(x) \; (\Longrightarrow \; x = f^{-1}(y))$

$$\Longrightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

__Beispiel:__

~~$\log :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ ist bij, mit~~

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$

ist bij, diff. mit $\exp' = \exp$

insb. $\exp'(x) = \exp(x) > 0$

$\overset{\text{Satz}}{\Longrightarrow}$ $\log = \exp^{-1}$ ist auf $]0, +\infty[$

differenzierbar mit

$$(\log)'(y) = \frac{1}{(\exp)'(\log(y))} = \frac{1}{\exp(\log(y))}$$

$$= \frac{1}{y}$$