Intervalle

" Ein Intervall ist eine Teilmenge

$$A \subset \mathbb{R}$$

sodass $x \in A \iff x$ liegt zwischen zwei gegebene Zahlen

d.h. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

vielleicht

$<$ $<$

vielleicht keine Bedingung $x \geq \ldots$

oder $x \leq \ldots$

Intervall	Def. $x \in A \ldots$	Max	Sup	Min	Inf
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	b	b	a	a
$[a, b[$ $\big([a,)\big)$ englisch Notation	$a \leq x < b$	kein	b	a	a
$]a, b]$	$a < x \leq b$	b	b	kein	a
$]a, b[$	$a < x < b$	kein	b	kein	a
$]-\infty, b]$ "minus unendlich"	$x \leq b$	b	b	kein	kein
$]-\infty, b[$	$x < b$	kein	b	kein	kein
$[a, +\infty[$	$a \leq x$	kein	kein	a	a
$]a, +\infty[$	$a < x$	kein	kein	kein	a
$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$	(keine Bedingung)	kein	kein	kein	kein
$\emptyset$					

$\boxed{a < b}$

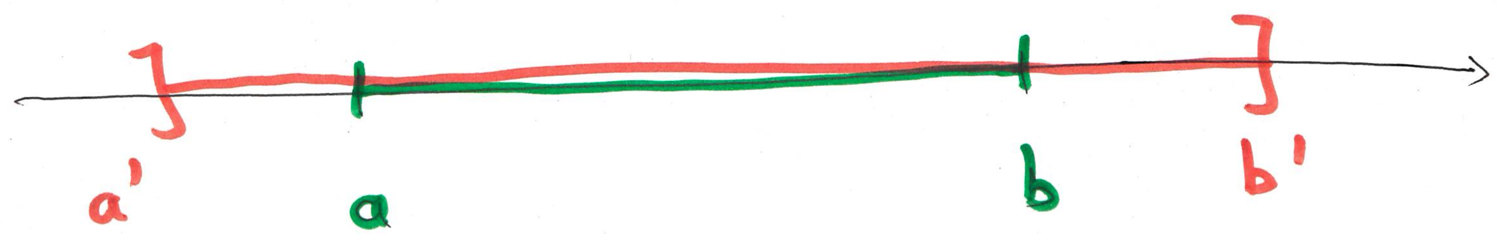
Bemerkung:

Man kann überprüfen:

$A \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall

$$\Updownarrow$$

$\forall\, a, b\,, \quad a, b \in A, \quad a \leq b$



es folgt: $\quad \forall\, x, \quad a \leq x \leq b, \quad x \in A$

Notation: $a < b$

$[a, b]$ heisst "kompakt" oder "abgeschlossen und beschränkt"

$]a, b[$ heisst "offen" (und beschränkt)

Bemerkung: $[a, a] = \{a\}$

und $]a, a] = [a, a[=]a, a[= \emptyset$

Def. (Absolutbetrag)

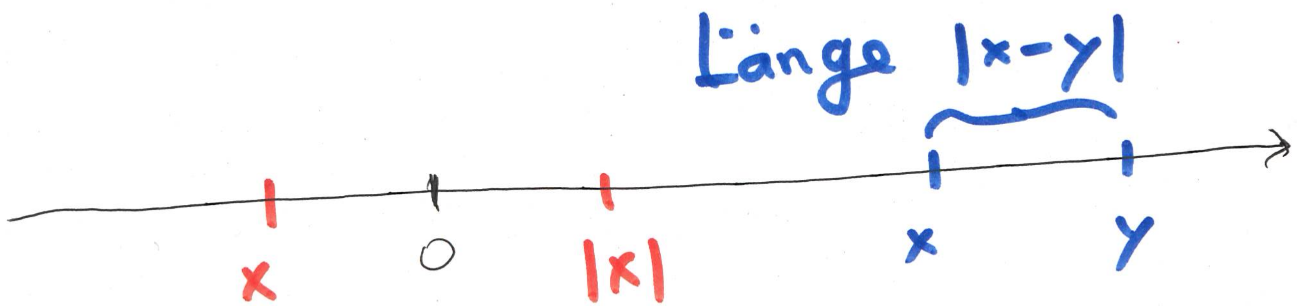
Es sei $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = \max\{x, -x\}.$$

(z.B. $|-1| = |1| = 1$)

Der **Abstand** zwischen x, y in $\mathbb{R}$ ist

$$|x - y|$$

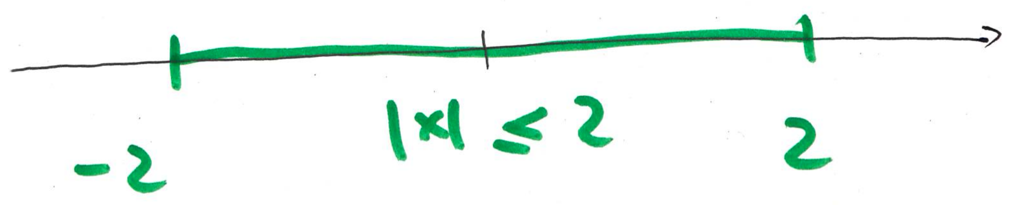


Es gilt:

$$x \leq |x| \,, \qquad -x \leq |x|$$

und $\big(|x| \leq a\big) \iff -a \leq x \leq a$

$\iff x \in [-a, a]$ (*)



<u>Satz</u> (1.1.10).

(i) $|-x| = |x| \geq 0 \,, \quad \big||x|\big| = |x|$

(ii) $|xy| = |x| \, |y|$

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ ("Dreiecksungleichung")

(iv) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

(v) $|x| = 0 \iff x = 0$.

Beweis - (i) einfach

(ii) z.B. $x \geq 0, \quad y < 0$

$\Rightarrow \quad xy \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |xy| = -xy$

$= x \cdot (-y)$

$= |x|\,|y|$

(iii) $\left.\begin{array}{l} x \leq |x| \\ y \leq |y| \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x + y \leq |x| + |y|}$

und

$\left.\begin{array}{l} -x \leq |x| \\ -y \leq |y| \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-(x+y) \leq |x| + |y|}$

$\Leftrightarrow -(|x|+|y|) \leq x+y$

$a \Leftrightarrow |x|+|y|$

$x \Leftrightarrow x+y$

$*$ $\Rightarrow \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

(iv)
(v) } Übungen

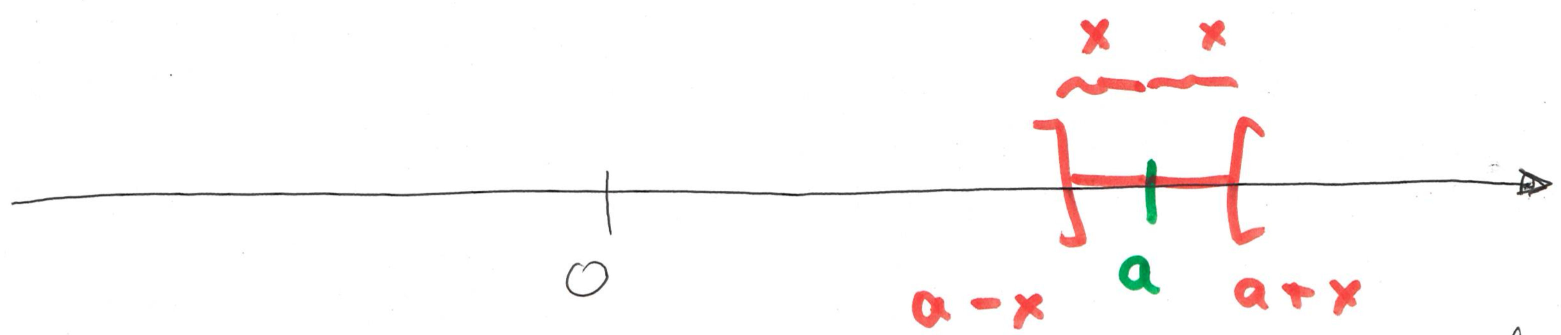
Die Intervalle:

$$]a - x, a + x[= \{ y \in \mathbb{R} \mid |a-y| < x \}$$

oder

$$[a - x, a + x] = \{ y \in \mathbb{R} \mid |a-y| \leq x \}$$

werden oft benutzt:



Wenn x ist "sehr klein" sind Zahlen in diese Intervalle "sehr nah" von a.

1.3 – Komplexe Zahlen

"$x^2 + 1 = 0$" hat keine Lösung in $\mathbb{R}$

aber mann braucht solche "imaginäre Zahlen"

für viele Anwendungen.

Def. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit

$$(a, b) + (c, d) = (a+c,\ b+d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = \cancel{(ad - bc,\ ac + bd)}\ \boxed{(ac - bd,\ ad + bc)}$$

$$0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$$

$$1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$$

Wir bezeichnen: $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$

51 ~~50~~

Es folgt:

(1) $\mathbb{C}$ mit $+, \cdot, 0_{\mathbb{C}}, 1_{\mathbb{C}}$ ist ein <u>kommutativer Körper</u>; insbesondere für $z=(a,b) \neq 0_{\mathbb{C}}$, ist

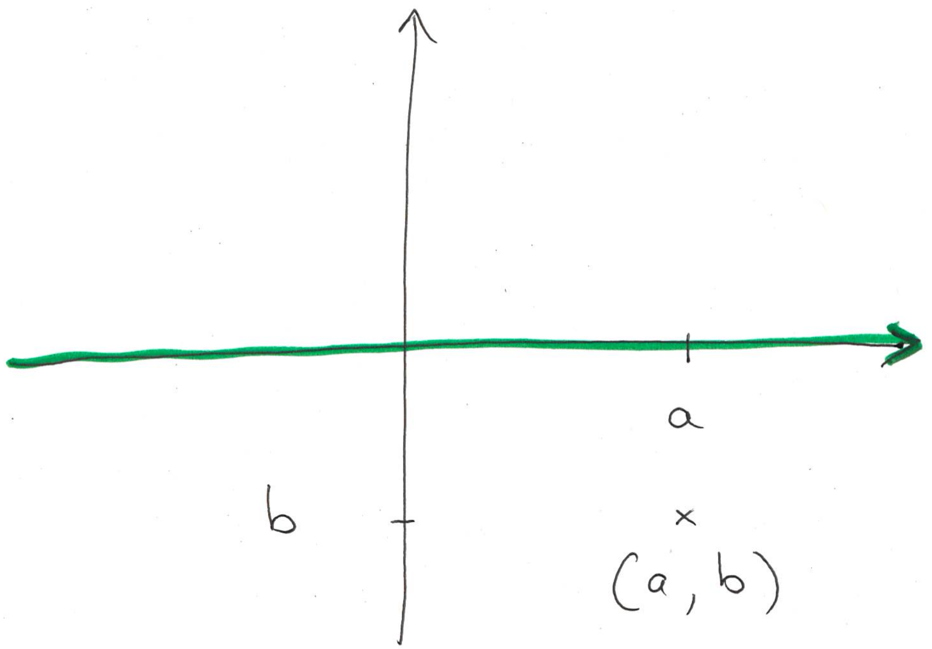
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$$

Produkt in $\mathbb{C}$, wo $\frac{1}{|z|^2} = \left(\frac{1}{|z|^2}, 0\right)$

wo $\begin{cases} |z|^2 = a^2 + b^2 \\ \bar{z} = (a, -b) \end{cases}$ ("konjugierte Zahl")

<u>Insbesondere</u>: $i^2 = (0,1)^2 = (-1, 0)$ "$= -1$" wo $-1 \in \mathbb{R}$

(2) Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit der Ebene und dann ist $\mathbb{R}$ mit der Teilmenge $\{(a,b) \mid b = 0\}$ identifiziert.



[z.B. $(a,0) \cdot (b,0) = (ab,0)$

$\quad\;\; a \;\cdot\; b \;=\; ab$]

Dann folgt

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + (b,0)(0,1) = a + ib$$

$$\left\{\begin{array}{lll} a & \text{heisst} & \text{Realteil} = Re(z) \\ b & \text{———} & \text{Imaginärteil} = Im(z) \end{array}\right\} \text{ von } (a, b) = a + ib$$

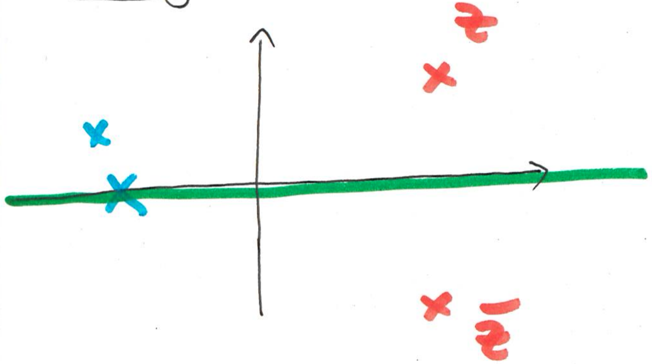
(3) $z = a + ib$

$\Rightarrow \quad \bar{z} = a - ib, \quad |z|^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z}$

Eigenschaften:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$



$$\boxed{\begin{array}{l} Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2} \\[2ex] Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} \end{array}}$$

Insbesondere:

$$\boxed{\begin{array}{l} (z \in \mathbb{C} \text{ gehört } \mathbb{R}) \\ \Longleftrightarrow \quad z = \bar{z} \end{array}}$$

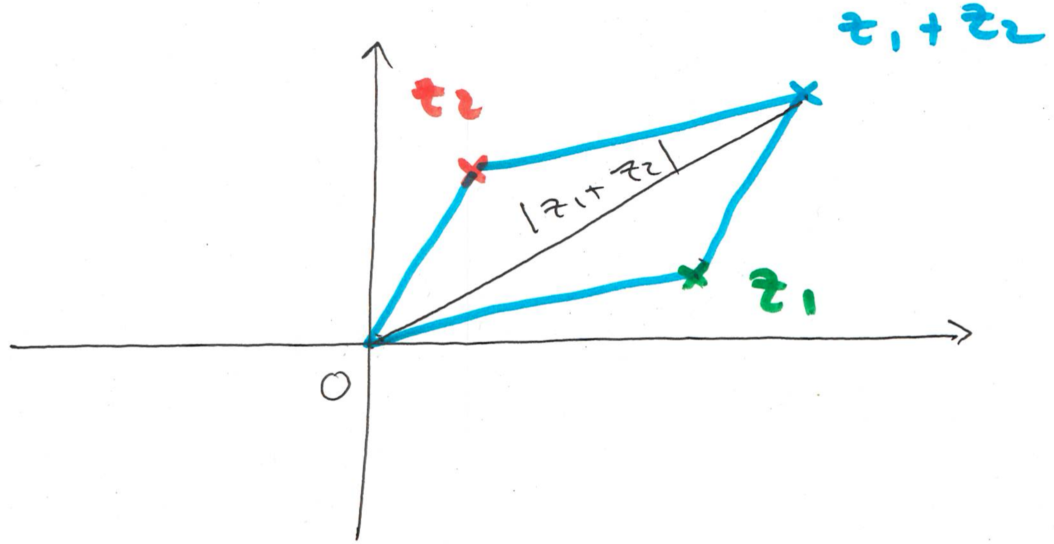
(4) $|z|^2 = a^2 + b^2 \geq 0$

<u>Def.</u> $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$ ("Absolutbetrag von $z \in \mathbb{C}$")

$\left(x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| \right)$

$|z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2|$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ("Dreiecksungleichung")



$\boxed{|w| = \text{Abstand zwischen } (0,0) \text{ und } w}$

(5) $\mathbb{C}$ ist kein <u>abgeordneter Körper</u>:

[<u>z.B.</u>

"$i \geq 0$" $\Rightarrow$ $i^2 = i \cdot i \geq 0$, $i^2 = -1$

nicht möglich!

"$i \leq 0$" $\Rightarrow$ $-i \geq 0$

$\Rightarrow$ $\underbrace{(-i)\cdot(-i)}_{i^2 = -1} \geq 0$

auch unmöglich]

__Satz__ – (1.3.4, "Fundamentalsatz der Algebra")

Seien $\begin{cases} n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \\ a_0, \ldots, a_{n-1} \text{ in } \mathbb{C} \\ a_n \in \mathbb{C}, \quad \boxed{a_n \neq 0} \end{cases}$

Es gibt $z_1, \ldots, z_n$ in $\mathbb{C}$ sodass

$\forall z \in \mathbb{C}$, $$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

__Insbesondere__: $a_n z^n + \ldots + a_0 = 0$

$\iff$ $z = z_1$, oder z_2, ..., oder z_n

Die Menge $\{z_1, \ldots, z_n\}$ ist eindeutig bestimmt, und so ist die Vielfachheit von z_j (d.h. wie viel z_k sind gleich z_j).

[<u>z.B.</u> für $z_1 = 2$, $z_2 = 2$, $z_3 = i$,
$z_4 = 2$,
die Vielfachheit von z_1 ist 3]