Kapitel III

Stetige Funktionen

Wir überlegen jetzt Funktionen

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

wo D wird meistens $D \subset \mathbb{R}$, und später D = Intervall in $\mathbb{R}$.

f heisst stetig falls "wenn x ein bisschen geändert ist, dann ist $f(x)$ nur ein bisschen geändert"

2.1. ~~Rel~~ Reellwertige Funktionen

Sei D beliebige Menge.

Sei $F(D) = \{ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \}$.

$F(D)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit:

$$(af)(x) = af(x), \quad a \in \mathbb{R},\ f \in F(D),\ x \in D$$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_i \in F(D),\ x \in D$$

$$0_{F(D)}(x) = 0, \quad x \in D$$

(Nullelement)

Man kann auch eine Multiplikation definieren:

$$f_1, f_2 \in F(D)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x), \quad x \in D$$

und es gibt eine Einheitsfunktion

$$1_{F(D)}(x) = 1, \quad x \in D$$

$$\left(1_{F(D)} \cdot f = f \cdot 1_{F(D)} = f \right)$$

Es gilt die übliche Regeln, wie

$$f_1 (f_2 + f_3) = f_1 f_2 + f_1 f_3$$

$\Longrightarrow$ $F(D)$ ist ein kommutativer <u>Ring</u> (wie $\mathbb{Z}$)

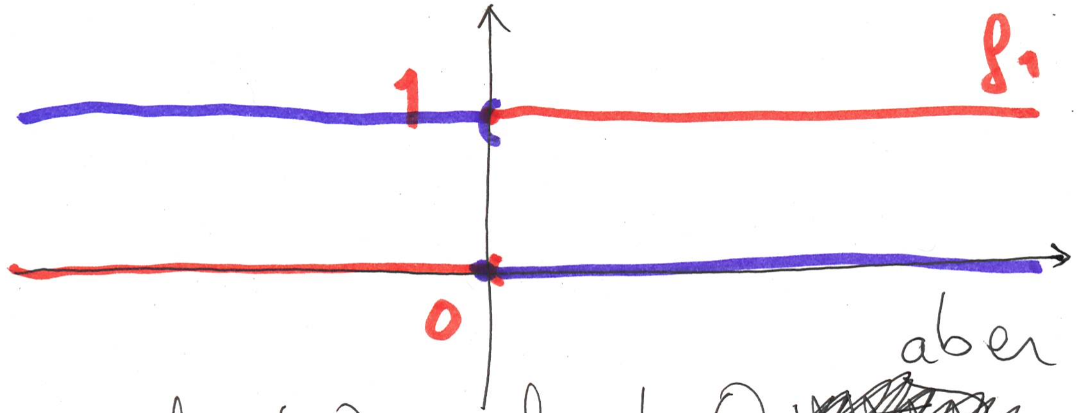
<u>aber</u> in der Regel ist nicht ein Körper

[falls D hat $\geq$ 2 Elemente, ist $F(D)$ <u>nicht</u> ein Körper]

<u>z. B.</u> $D = \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$



$f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$ aber $f_1 f_2 = 0$

Wir definieren eine Ordnungsrelation auf $\mathcal{F}(D)$: $f_1 \leq f_2$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in D, \quad f_1(x) \leq f_2(x)$$

Es gilt:

$$\begin{cases} f \leq f \\ f \leq g \text{ und } g \leq f \Rightarrow f = g \\ f_1 \leq f_2 \text{ und } f_2 \leq f_3 \Longrightarrow f_1 \leq f_3 \end{cases}$$

("Transitivität")

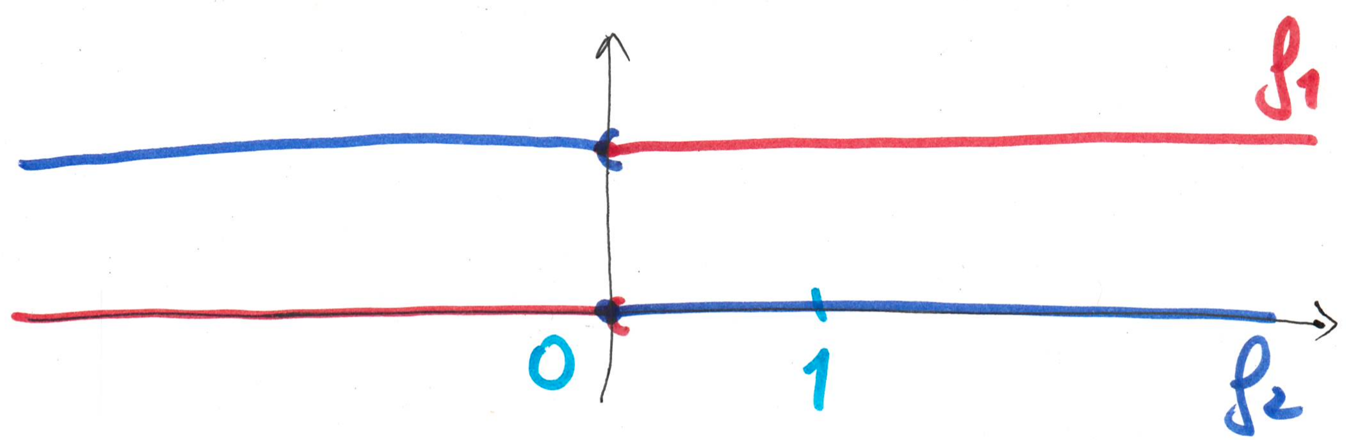
__Aber:__ zwei Funktionen sind __nicht__ immer vergleichbar: es kann sein dass f_1, f_2 sind Elemente von $\mathcal{F}(D)$

aber es ist <u>nicht</u> den Fall
dass $f_1 \leq f_2$.

<u>und</u>

$f_2 \leq f_1$.

<u>Beispiel</u>



Es gilt <u>nicht</u> $f_1 \leq f_2$ $\quad (f_1(1) > f_2(1))$

$f_2 \leq f_1$ $\quad (f_2(-1) > f_1(-1))$

Def. (3.1.2) Sei $\boxed{D \subset \mathbb{R}}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

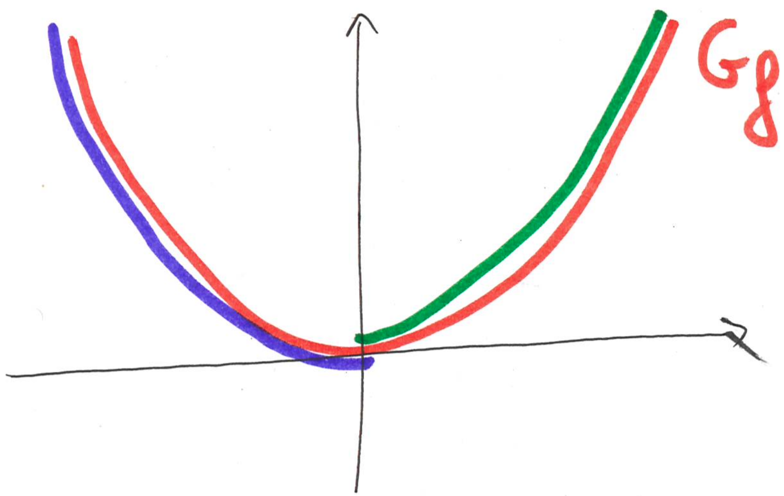
f heisst	wachsend	falls $x \le y \Rightarrow$	$f(x) \le f(y)$
	fallend	$(x, y \in D)$	$f(y) \le f(x)$
	streng wachsend	mit $x \neq y$	$\boxed{f(x) < f(y)}$
	streng fallend		$\boxed{f(y) < f(x)}$
	~~monoton~~		
	~~streng monoton~~		

f heisst monoton (bzw. streng monoton) wenn f ist entweder wachsend oder fallend (bzw. streng wachsend oder " fallend)

Beispiele. Wir benutzen den Graph von f:

$$G_f = \{ (x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x) \}$$

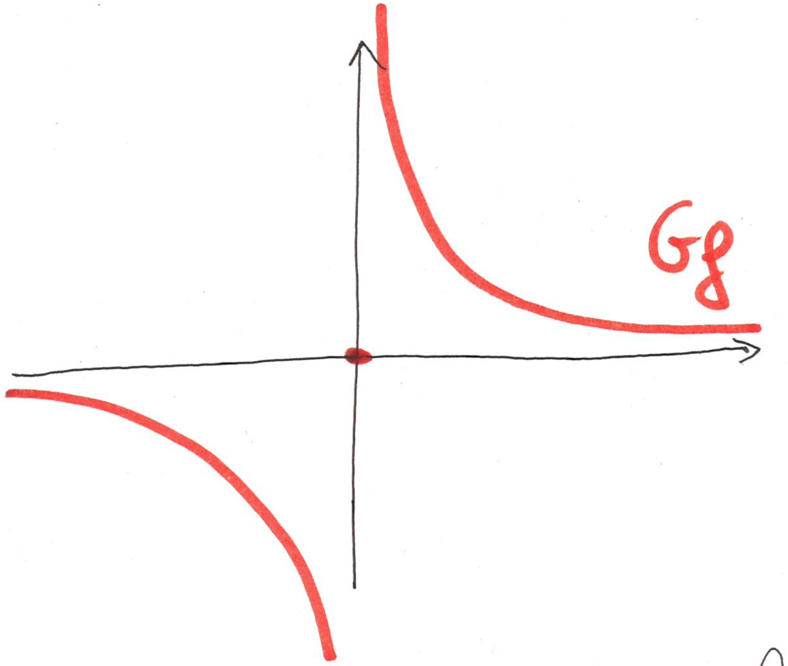
(1) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, f ist <u>nicht</u> monoton;



aber f auf $]-\infty, 0]$ "beschränkt" (die Definitionsmenge ist durch die Teilmenge $]-\infty, 0]$ ersetzt) ist <u>streng fallend</u>.

Auf $[0, +\infty[$ ist f streng wachsend.

(2) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$

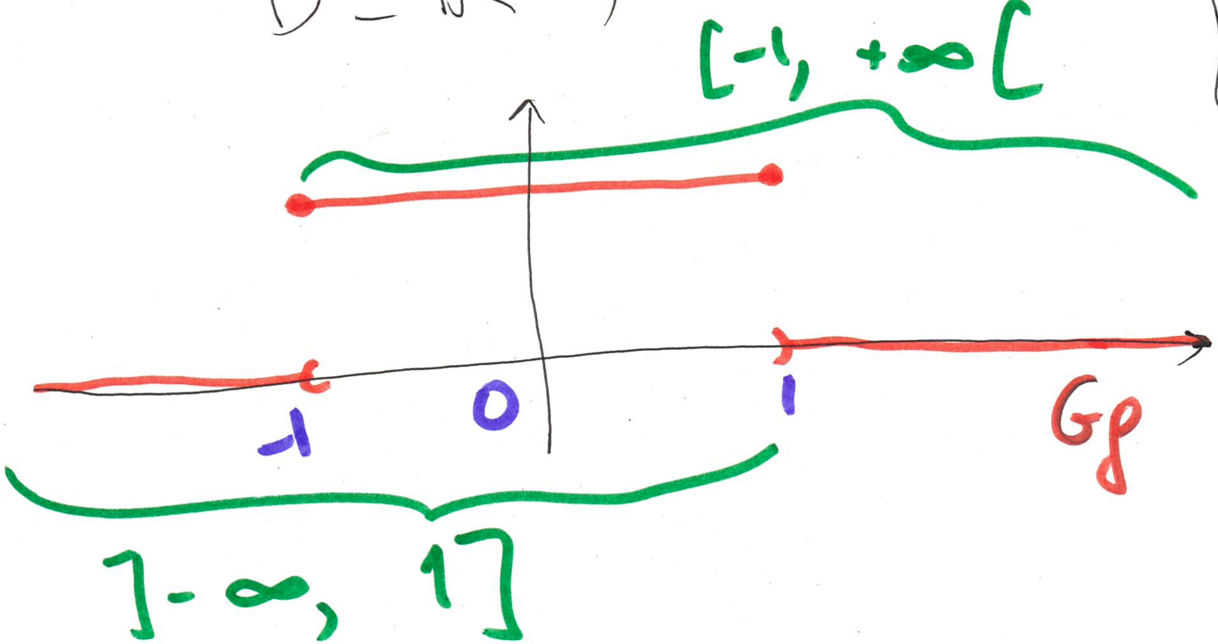


Auf $\mathbb{R}$ ist f <u>nicht monoton.</u>

Auf $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ ist f streng fallend.

[d.h. z.B. $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$]

(3) Sei $D = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$



f ist auch auf $\mathbb{R}$ <u>nicht</u> monoton

Sie ist wachsend auf $]-\infty, 1]$,
nicht <u>streng</u> $[-1 < 1$ aber $\underset{=1}{f(-1)} \not> \underset{\le 1}{f(1)}]$

und <u>fallend</u> auf $[-1, +\infty[$ $\quad 1 \le 1$

(4) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \exp(x) \; (= e^x)$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dann ist f auf $\mathbb{R}$ <u>streng</u> wachsend.

<u>Beweis</u>. Falls $x < y$,

$$f(y) - f(x) = \exp(y) - \exp(x) = \underbrace{\exp(x)}\underbrace{\left(\exp(y-x) - 1\right)}_{>0}$$

$\exp(y) = \exp(y-x+x) = \exp(y-x)\exp(x)$

$$\exp(y-x) - 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(y-x)^n}{n!} - 1$$

$$= \cancel{1} + y - x + \frac{(y-x)^2}{2} + \dots \cancel{- 1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(y-x)^n}{n!}}_{> 0 \text{ weil } y > x} > 0$$

Für $\underline{x \geq 0}$:

$$\exp(x) = \underbrace{1}_{>0} + \underbrace{x}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\geq 0} + \dots > 0$$

Für $\underline{x < 0}$: $\exp(x) = \dfrac{1}{\underbrace{\exp(-x)}_{>0}} > 0$

So $\exp(y) - \exp(x)$

$$= \underbrace{\underbrace{\exp(x)}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\exp(y-x) - 1\right)}_{>0}}_{>0}$$

2.2. Stetige Funktionen

Definition. $D \subset \mathbb{R}$

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

$x_0 \in D$

f ist an der Stelle x_0 stetig falls:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in D, \ \left(|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right)$$

f heisst stetig auf D $\Longleftrightarrow$ f ist an jede $x_0 \in D$ stetig.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

wie genau sollen wir x_0

"wir wollen $f(x_0)$ mit Präzision ε berechnen"

"wissen" um diese Präzision ε zu erhalten

(z.B. $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, 3 Dezimalstellen)

(wenn wir kennen x_0 mit eine ~~[illegible]~~ hoch genug Präzision, können $f(x_0)$ mit 3, oder 10, oder … Dezimalstellen berechnen)

__Notation:__ $C(D) = \{ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist auf } D \text{ stetig} \}$

"continuous"

$$C(D) \subset \mathcal{F}(D)$$

__Beispiele -__

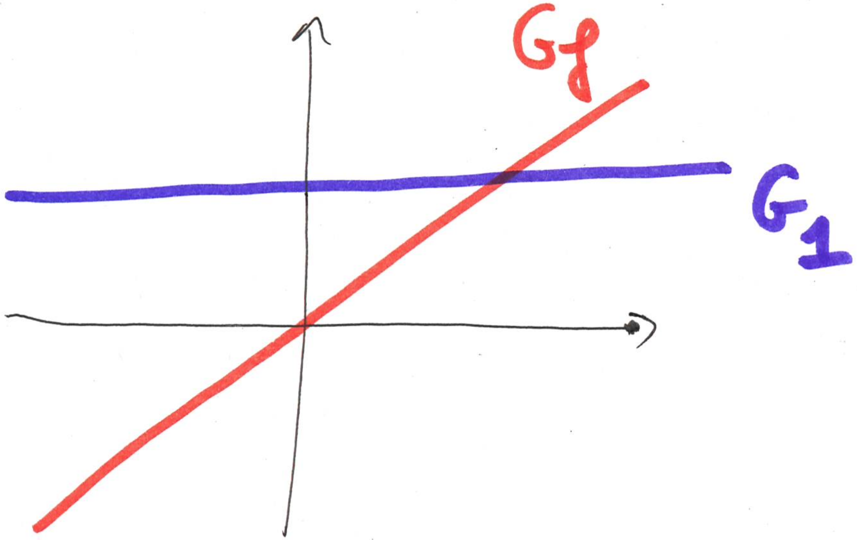
(1) Die Funktionen die konstant sind sind stetig (weil $|f(x) - f(y)| = 0$)

(2) Die Identitätsfunktion: $f(x) = x$ für $x \in D$ ist auf D stetig

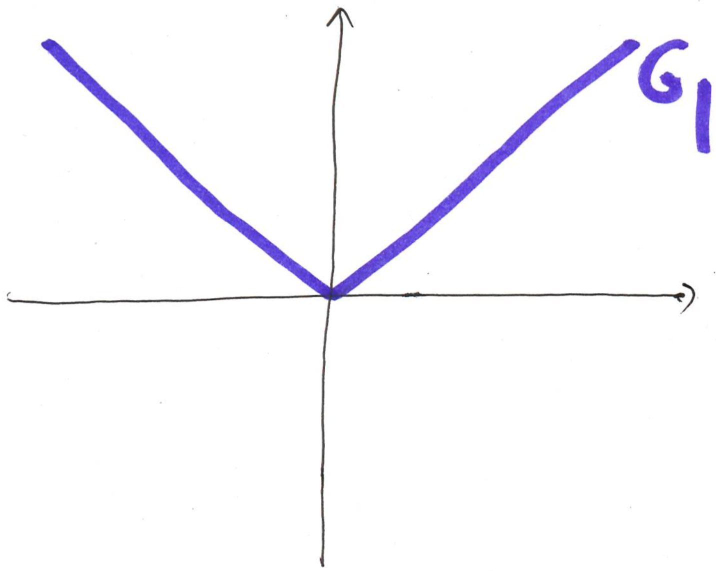
(man kann $\delta = \varepsilon$ definieren:

falls $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$, folgt

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon)$$



(3) Der Absolutbetrag $f(x) = |x|$ ist auch auf $D = \mathbb{R}$ stetig.



$G_{|\cdot|}$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(x_0)|$$

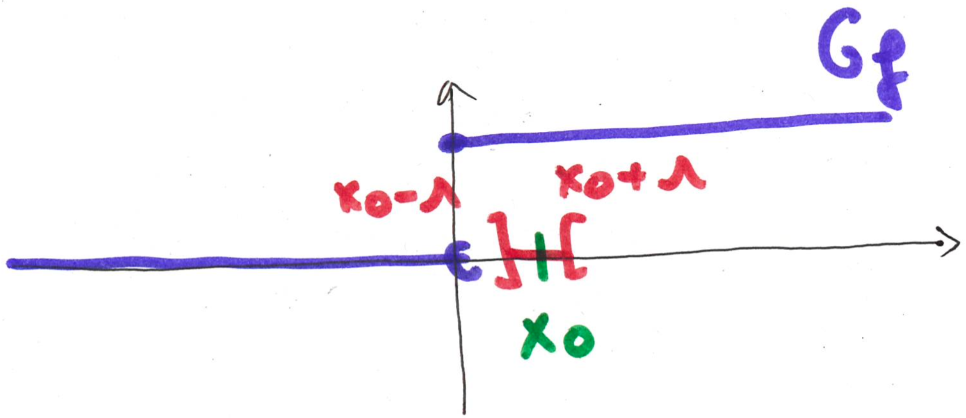
$$\left(\overset{?}{\leq}\right) = \big|\,|x| - |x_0|\,\big|$$

$$\text{Kap. I} \leq |x - x_0|$$

Es folgt: wir können $\delta = \varepsilon$ nehmen in der Definition.

(4) Sei $D = \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



<u>Für</u>: $x_0 \neq 0$: es gibt dann $r > 0$ sodass

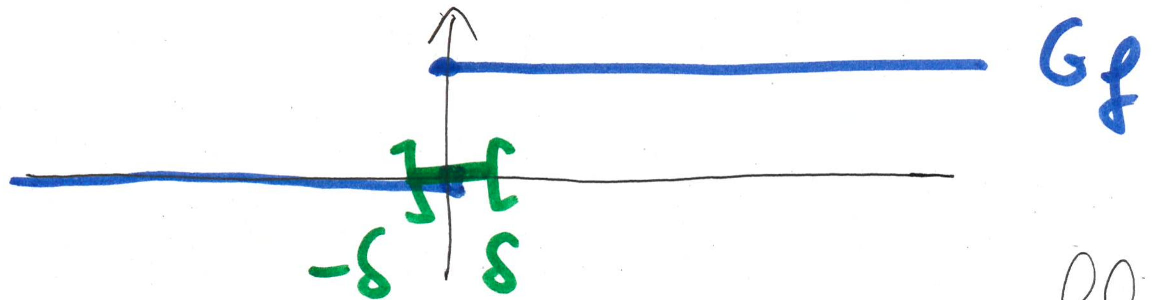
$f(x) = f(x_0)$

falls $x \in \underbrace{]x_0 - r, x_0 + r[}$

d. h. f ist konstant "in der Nähe von x_0"

$\Longrightarrow$ f ist an x_0 stetig
(Stetigkeit an x_0 hängt nur von f "in der Nähe von x_0")

Für $x_0 = 0$: die Funktion ist an diese Stelle nicht stetig, weil



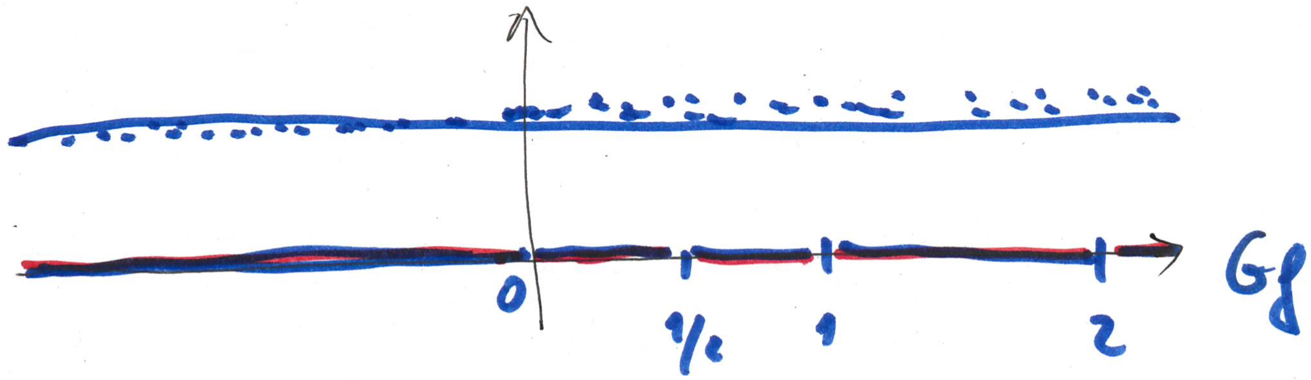
für $x < 0$, auch sehr klein, ist $f(x) = 0$

nicht in der Nähe von $f(x_0) = 1$

("0 ist nicht eine gute Approximation von 1")

(5) Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



Für **keine** x_0 ist f an x_0 stetig!

Satz (3.2.4).

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

f ist stetig (an $x_0 \in D$)

$$\Updownarrow$$

für alle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in D$,
falls $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$, folgt $f(a_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x_0)$

Die beide Richtungen sind wichtig!

Bemerkung. $\boxed{\text{„}f \text{ stetig} \iff f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\text{"}}$

Beweis.

$\Longrightarrow$ sei (a_n) konv. gegen x_0 sein,
$a_n \in D$

Sei $\varepsilon > 0$, wir wollen n finden

sodass $|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$,

dies gilt falls $\boxed{|a_n - x_0| < \delta}$, wo

$\delta > 0$ is durch Stetigkeit $(a_n\ x_0)$ bestimmt.

Weil $a_n \longrightarrow x_0$, gibt es $N \geq 0$ sodass

$|a_n - x_0| < \delta$ für $n \geq N$.

D.h.: $|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $n \geq N$