$\Leftarrow$: wir nehmen an dass

$$\text{"}(a_n \to x_0) \Rightarrow (f(a_n) \to f(x_0))\text{"}$$

und wollen die Stetigkeit überprüfen (an x_0)

Durch Widerspruch : nehmen wir an, f ist nicht an x_0 stetig : das heisst

$$\left[\begin{array}{l} \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D, \\ \qquad |x - x_0| < \delta \text{ aber} \\ \qquad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \end{array}\right.$$

Wir nehmen $\delta = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, erhalten $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Wegen $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, ist (x_n) konv. mit Grenzwert x_0, aber wegen

$$|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon \quad (\text{und } \varepsilon > 0)$$

ist $(f(x_n))_{n \geq 1}$ **nicht** gegen $f(x_0)$ konvergent.

Dies ist ein Widerspruch.

Korollar (3.2.5) $D \subset \mathbb{R}$

$\{f : D \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ stetig}\}$

(1) Falls f, g in $C(D)$ sind, ist $f+g$ in $C(D)$

(2) ______, ist fg in $C(D)$

25

(3) $f, g \in C(D)$, falls $g(x) \neq 0$ für $x \in D$ ist $\frac{f}{g}$ auch in $C(D)$

<u>Beweis</u> (3) sei $x_0 \in D$; sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $a_n \to x_0$;

dann ist $f(a_n) \longrightarrow f(x_0)$ [f stetig + Satz 3.2.4]

$g(a_n) \longrightarrow g(x_0)$ [g stetig + Satz 3.2.4]

und $g(a_n) \neq 0$, $\forall n$

$\overset{\text{Satz 2.1.8}}{\Longrightarrow}$ $\frac{f(a_n)}{g(a_n)} \longrightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

$\overset{\text{Satz 3.2.4}}{\Longrightarrow}$ f/g ist an x_0 stetig.

26

Beispiel. Seien $d \in \mathbb{N}$

$a_0, \dots, a_d \in \mathbb{R}$

$D \subset \mathbb{R}$

und $f(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$(x \in D)$

Dann ist $f \in C(D)$.

[$f = f_d + \dots + f_0$, $\quad f_j(x) = a_j x^j$,

$f_j = c_j g^j \quad$ wo $\begin{cases} c_j(x) = a_j \\ g(x) = x \end{cases}$

g ist stetig, c_j ist stetig $\underset{\text{(Kor.)}}{\Longrightarrow}$ f_j ist stetig

$\underset{\text{(Kor.)}}{\Longrightarrow}$ $f = f_0 + \dots + f_d$ ist stetig]

Satz: (3.5.1)

Seien D_1, D_2 Teilmengen von $\mathbb{R}$

$f : D_1 \longrightarrow D_2$, stetig

$g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, stetig

Dann ist $g \circ f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(g \circ f(x) = g(f(x)))$ auch stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in D_1$,

(a_n) Folge in D_1, $a_n \to x_0$

f stetig (an x_0) $\xRightarrow[3.2.4]{\text{Satz}}$ $f(a_n) \longrightarrow f(x_0)$

g stetig (an $f(x_0)$) $\xRightarrow{3.2.4}$ $\underbrace{g(f(a_n))}_{= g\circ f(a_n)} \longrightarrow \underbrace{g(f(x_0))}_{g\circ f(x_0)}$

$\xRightarrow{3.2.4}$ $g \circ f$ ist stetig.

Beispiel.

(1) $f(x) = \exp(x)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Satz. f ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) - \exp(x_0) = \exp(x_0)\left(\exp(x-x_0) - 1\right)$$

und

$$\exp(x-x_0) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

$$\left|\exp(x-x_0)-1\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-x_0|^n}{n!}$$

Dreicksungl. für abs. Konv. Reihen

$$\left(\frac{1}{n!} \leq 1\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x-x_0|^n$$

falls $|x-x_0|<1$

(weil $\sum q^n$, $|q|<1$, abs. konv. ist)

$$= \frac{1}{1-|x-x_0|} - 1$$

gliedem $|x-x_0|^0$

$$= \frac{|x-x_0|}{1-|x-x_0|}$$

D. h. wenn $|x - x_0| < \frac{1}{2}$,

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| \leq \underbrace{\exp(x_0)}_{>0} \cdot 2 \cdot |x - x_0|$$

weil $1 - |x - x_0| \geq \frac{1}{2}$

Für $\varepsilon > 0$, sei $\delta = \min\left(\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{4\exp(x_0)}\right)$;

für $|x - x_0| < \delta$ ist

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| < 2\exp(x_0) \cdot \frac{\varepsilon}{4\exp(x_0)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Bemerkung. Falls es gibt $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M \, |x - x_0|$$

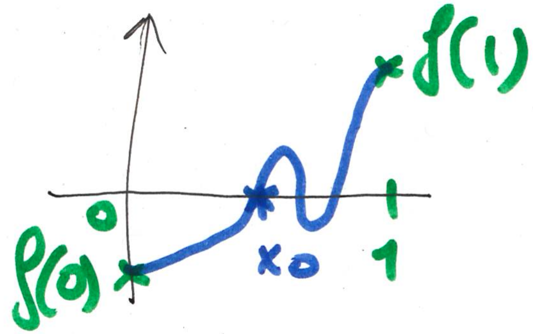
folgt dass f stetig (an x_0) ist.

Beispiel.

$$f(x) = \exp\left(\exp\left(x^3 + \frac{x^2+1}{x^4 + \exp\left(\frac{1}{x^6+2}\right)}\right)\right)$$

ist auf $\mathbb{R}$ stetig.

3.3. Zwischenwertsatz.



Satz. (3.3.1)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ $\boxed{\text{ein Intervall}}$ und
$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\boxed{\underline{\text{stetig}}}$.

Für alle $a < b$ in I, und für alle $y \in \mathbb{R}$ "zwischen $f(a)$ und $f(b)$",
es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y$.

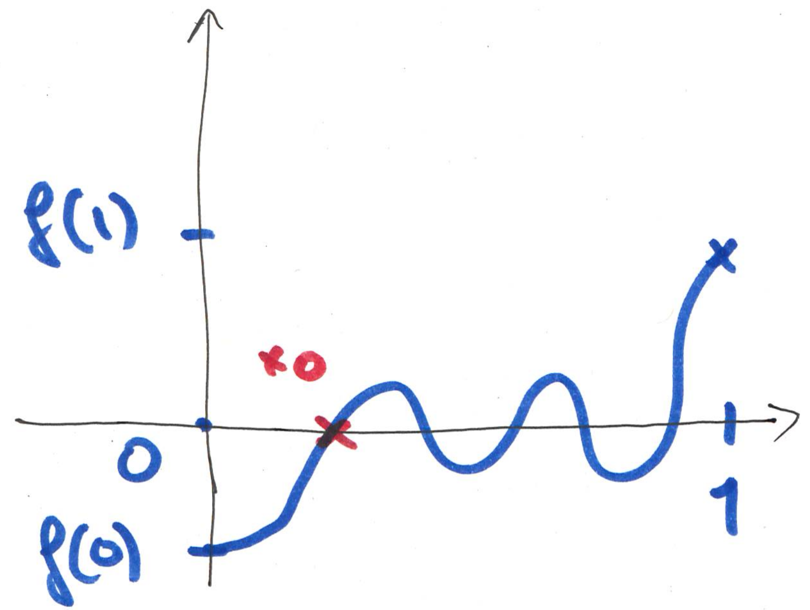
$$\begin{cases} f(a) \le y \le f(b), & \text{falls } f(a) \le f(b) \\ f(b) \le y \le f(a), & \text{sonst} \end{cases}$$

(Anders gesagt: das Bild $f(I) \subset \mathbb{R}$ von f ist ein Intervall in $\mathbb{R}$)

<u>Beweis</u> – (Idee) Wir nehmen an:

$I = [0, 1]$, $a = 0$, $b = 1$

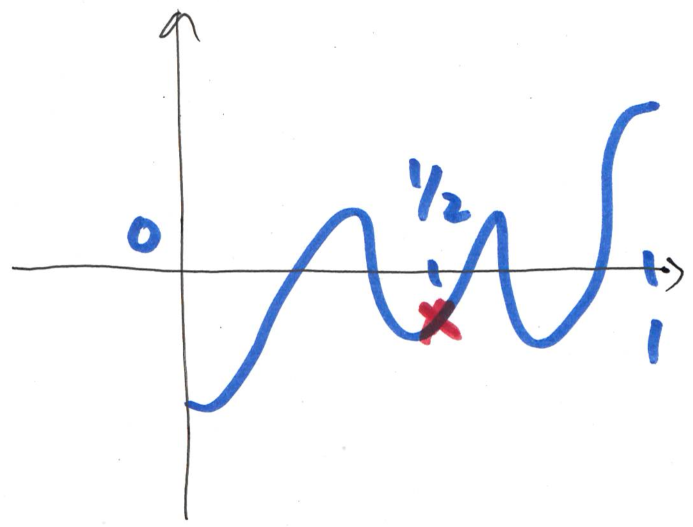
$f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $y = 0$.



Seien

$a_0 = 0$, $b_0 = 1$

Wir überlegen $f\left(\frac{1}{2}\right)$:



$\underline{f\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$:

$\Rightarrow$ wir haben x_0 gefunden

$\underline{f\left(\frac{1}{2}\right) < 0}$:

$a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = 1$

$\left(f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0 \right)$

$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}$

$\underline{f\left(\frac{1}{2}\right) > 0}$:

$a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{1}{2}$

$\left(f(a_1) < 0, \quad f(b_1) > 0 \right), \quad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}$

Induktiverweise konstruieren wir Folgen

$(n \geq 0)$ (a_n), (b_n) mit

(1) $0 \leq a_n \leq b_n \leq 1$, $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$

(2) $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$

(3) $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$

(oder finden wir eine Nullstelle
$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0$)

Wegen (1) konvergieren (a_n) und (b_n);
haben $\lim a_n = \lim b_n$ wegen (2)

wegen (3), und **Stetigkeit** $(a_n \; x_0)$ $\quad \underbrace{f(a_n)}_{<0} \longrightarrow f(x_0)$

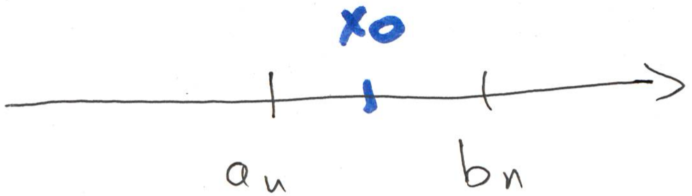
$$\Longrightarrow \quad f(x_0) \leq 0$$

und $\quad f(b_n) \longrightarrow f(x_0)$

$$\Longrightarrow \quad f(x_0) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{f(x_0) = 0}$$

<u>Bemerkung</u> – $\quad |a_n - x_0| \leq |a_n - b_n| = \frac{1}{2^n}$



(die Konvergenz ist ziemlich schnell)

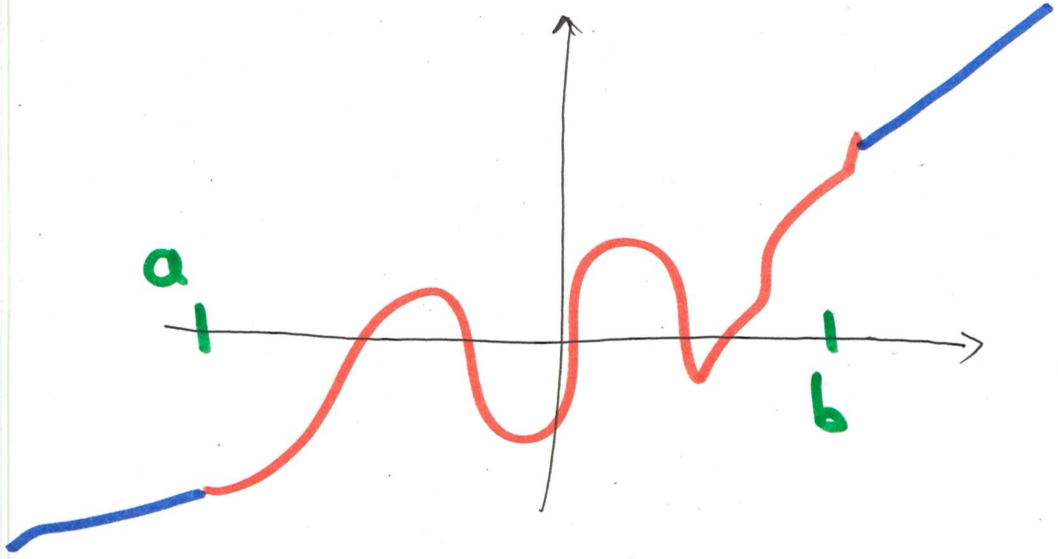
__Beispiel.__ (3.3.2)

Falls $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, und

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

(mit $a_i \in \mathbb{R}$); es gibt (mindestens) eine reelle Zahl x_0 mit

$$f(x_0) = 0.$$



__Beweis:__ wir überprüfen, dass

$f(k) > 0$ für

$k \in \mathbb{N}$ gross genug und

$$f(-k) < 0$$

für $k \in \mathbb{N}$ ~~gross~~ gross genug,

seien ~~a, b~~ ~~s~~ $-a \in \mathbb{N}$, $+b \in \mathbb{N}$ mit

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0,$$

wegen Stetigkeit von f auf $\mathbb{R}$ folgt vom Zwischenwertsatz, dass es gibt eine Nullstelle zwischen a und b.

$$\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{k\to\infty} \left(k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_0 \right)$$

$$= +\infty \quad (\text{weil } n \geq 1)$$

$$\lim_{k\to\infty} f(-k) = \lim_{k\to\infty} \left(\underbrace{(-1)^n}_{-1} k^n + \dots \right)$$

$$= -\infty \quad (\text{weil } n \text{ ist } \underline{\underline{\text{ungerade}}})$$

$\Rightarrow \exists N,\ f(k) > 0$ für $k \geq N$

$\exists M,\ f(-k) < 0$ für $k \geq M$

[Dann können wir $a = -M$, $b = N$ nehmen]

41

3.4. Min - Max Satz

$(a \le b)$

Def. $I = [a, b]$ heisst kompaktes Intervall.

($\Longleftrightarrow$ I hat ein Maximum und ein Minimum)

Satz. (3.4.5) Seien $a \le b$,

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

stetig. Die Funktion f hat auf $[a,b]$ ein Maximum / ein Minimum d.h.

$\exists\ x_0 \in [a,b],\quad f(x_0) = \operatorname{Max} f([a,b])$

$\left(\iff \forall x \in [a,b],\ f(x) \leq f(x_0) \right)$

$\exists\ y_0 \in [a,b],\quad f(y_0) = \operatorname{Min} (f([a,b]))$

$\left(\iff \forall x \in [a,b],\ f(x) \geq f(y_0) \right)$

Insbesondere:

$$f([a,b]) = [f(y_0), f(x_0)]$$

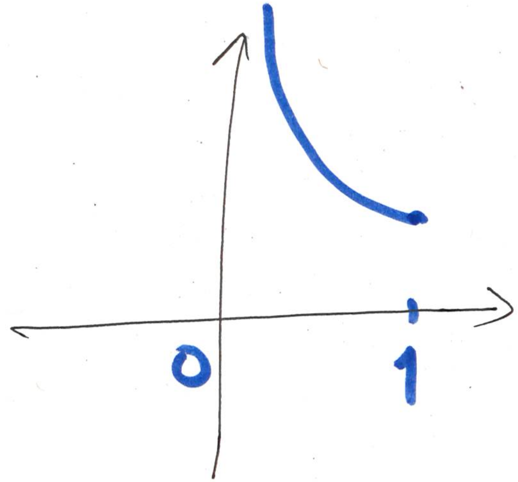
(mit dem Zwischenwertsatz)

Insbesondere: f ist **beschränkt**.

<u>Gegenbeispiel.</u>

$$I = \,]0, 1]$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{stetig}$$



$f(I) = [1, +\infty[$ ist <u>nicht</u> beschränkt,

f hat kein <u>Maximum</u> auf I.

Bemerkung - Wie man x_0, y_0 findet ist nicht so einfach zu beschreiben...

Beweis -

Idee: 1) wir überprüfen, $f([a,b])$ beschränkt ist

2) wenn $A = f([a,b])$ von ob. beschränkt ist, hat A ein Supremum, $M = \sup(A)$.

Aus Def. von $\sup(A)$, finden wir eine Folge (a_n) in $[a,b]$ mit

$$f(a_n) \longrightarrow M.$$

__Falls__ (a_n) __konvergiert__, gegen $x_0 \in [a,b]$, wäre

$$f(a_n) \longrightarrow f(x_0) \quad [\text{Satz } 3.2.4]$$

$$\Longrightarrow M = f(x_0)$$

In __jedem Fall__: (a_n) ist beschränkt, deshalb hat eine konv. Teilfolge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $b_m \longrightarrow x_0$

$b_m \longrightarrow x_0$

$\Longrightarrow \quad f(b_m) \longrightarrow f(x_0)$

$(f(b_m))$ Teilfolge von $(f(a_n))$

$\Longrightarrow \quad f(b_m) \longrightarrow M$

$\Longrightarrow \quad \boxed{M = f(x_0)}$