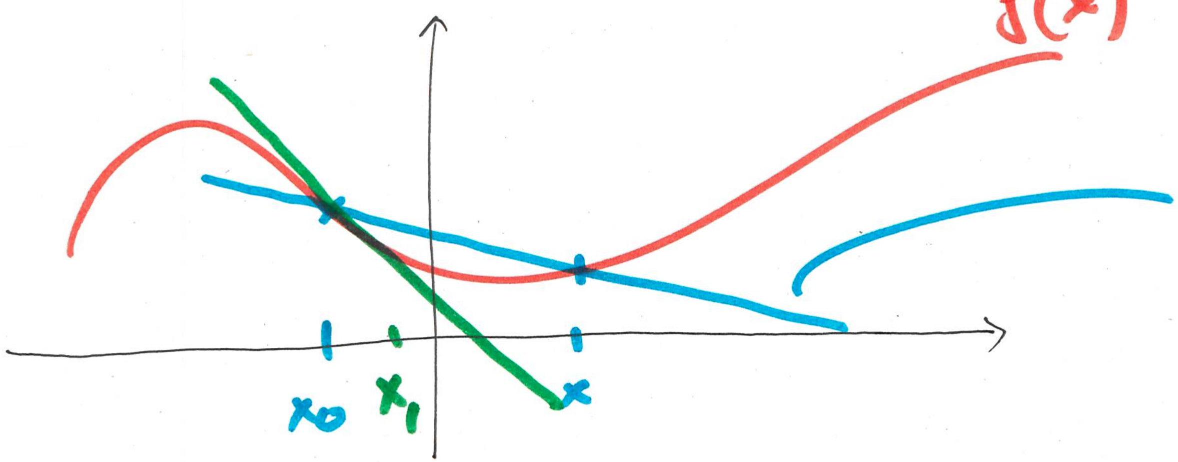
Erinnerung:

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_0 \in I$$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Steigung

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Erste Anwendung:

(4.2.10)

Satz (Regel von L'Hospital)

$f, g : \,]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ ($b = +\infty$ ist möglich)

differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für $a < x < b$

(ähnlicherweise für $x \to a$, $x > a$)

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$$

(Falls $f \to u$, $g \to v$, $f/g \longrightarrow \frac{u}{v}$ falls u und v sind nicht beide 0)

Wir nehmen an, $f(x) \longrightarrow 0$, $g(x) \longrightarrow 0$

als $x \longrightarrow b$, $x < b$.

Falls $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert und ist gleich $t \in \mathbb{R}$ (oder $t = +\infty$ oder $-\infty$), folgt

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = t$$

(oder $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f}{g} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'}{g'}$)

<u>Insbesondere:</u> falls $\left.\begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\right\}$ auf $[a, b]$ definiert sind und an b differenzierbar sind, ist

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)} \quad \text{wenn } g'(b) \neq 0.$$

Beispiele -

(1) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{+\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\cos(x) \neq 0$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

(2) $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \log(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\frac{1}{\log(x)}}$$

$\log(x) \to -\infty$

$$\left(\begin{array}{l} f(x) = x \,, \quad f(0) = 0 \\ g(x) = \dfrac{1}{\log(x)} \,, \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\log(x)} = 0 \end{array} \right)$$

$\boxed{\text{L'Hospital}}$ $\stackrel{}{=}$ $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{g'(x)}$$

wo

$$g'(x) = \left(\frac{1}{\log x} \right)'$$

$$= - \frac{(\log)'(x)}{(\log x)^2} = - \frac{1}{x(\log x)^2}$$

d.h. $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(- x (\log x)^2 \right) = \,?$$

In diesem Fall ist das nicht einfacher!

Besser: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \log(x)$

$x = e^{-y} \iff \log(x) = -y$

$(y \to +\infty \iff x \to 0)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \log(x) = \lim_{y \to +\infty} (-y) e^{-y}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} - \frac{1}{\frac{1}{y} e^{y}} = 0$$

4.2 „Globale" Folgerungen der Differenzierbarkeit

Def. $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$,

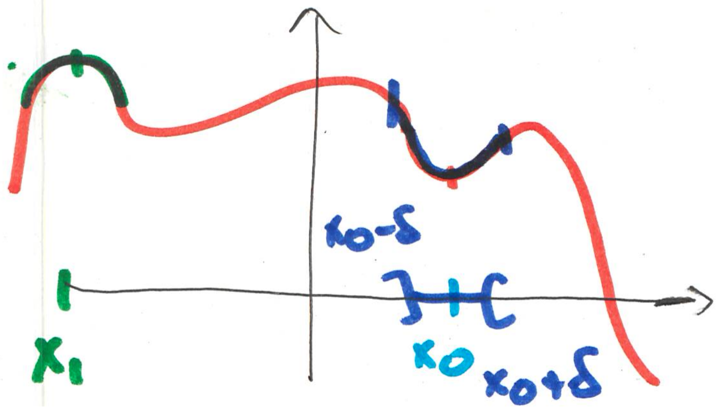
$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) f hat an x_0 ein **lokales** Minimum (bzw. Maximum) falls: $\exists\, \delta > 0$ sodass

falls $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x \in I}, \\ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \end{array} \right.$

$f(x) \geq f(x_0)$

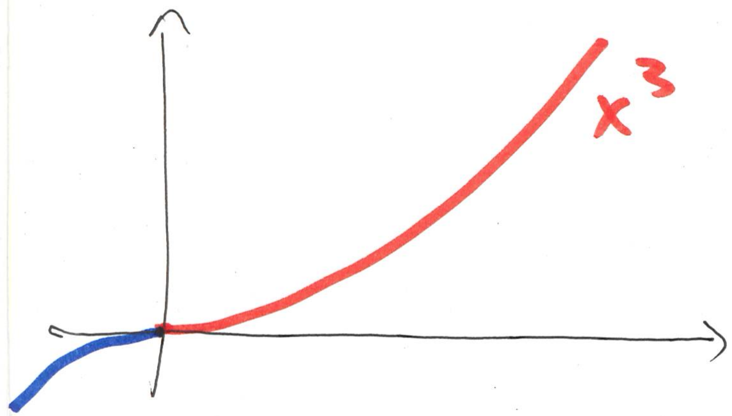
(bzw. $f(x) \leq f(x_0)$)



(2) f hat an x_0 ein <u>lokales</u> Extremum falls f hat entweder lokales Max oder Min an x_0

<u>Bemerkung</u>: man muss nicht die Bedingung $x \in I$ vergessen:

$f(x) = x^3$, $\boxed{x \in [0, +\infty[}$



f hat ein lokales Min an $x_0 = 0$

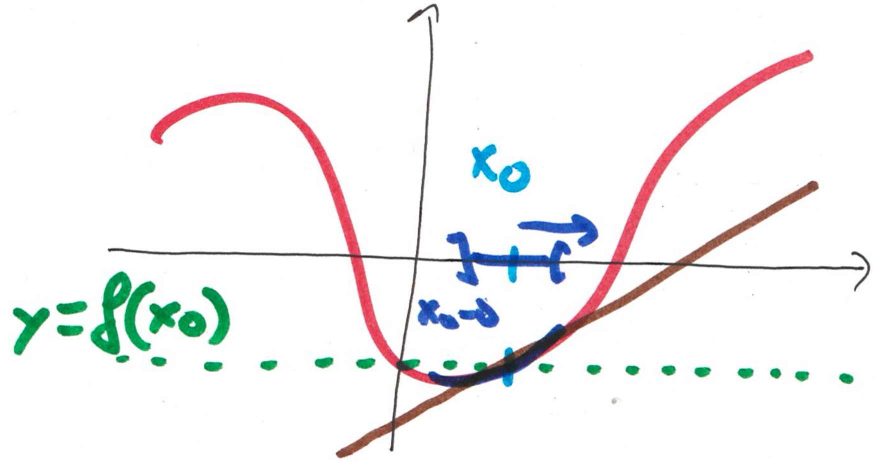
(obwohl es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $x^3 < 0$)

Satz. (4.2.2)

$f : \,]a, b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad a < x_0 < b$

Hyp.: f ist an x_0 differenzierbar

(1) Falls $f'(x_0) > 0$



$\Longrightarrow$

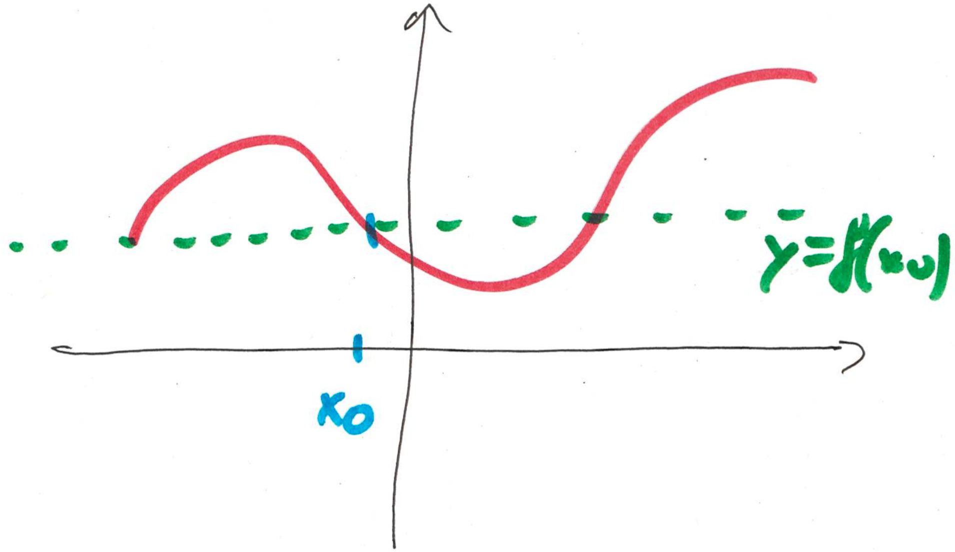
$\exists\, \delta > 0$, sodass

$$\begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{für } x_0 < x < x_0 + \delta \\ f(x) < f(x_0) & \text{für } x_0 - \delta < x < x_0 \end{cases}$$

(2) Falls $f'(x_0) < 0$

$\Rightarrow \exists\ \delta > 0,$

$$\begin{cases} f(x) < f(x_0), & x_0 < x < x_0+\delta \\ f(x) > f(x_0), & x_0-\delta < x < x_0 \end{cases}$$

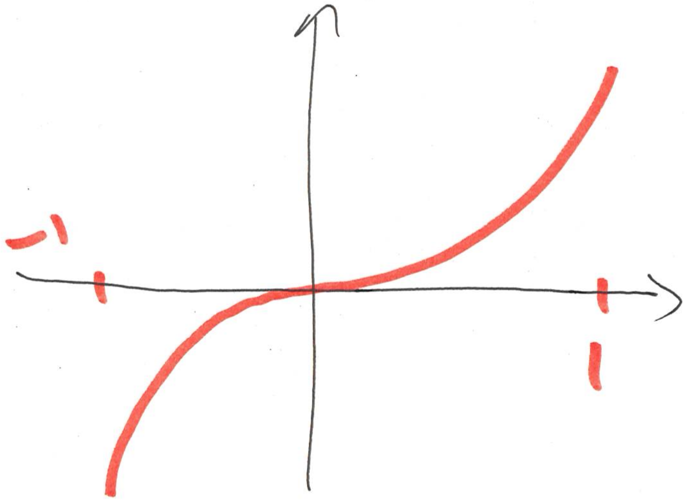


(3) Falls f an x_0 ein lokales Extremum hat, ist $\boxed{f'(x_0) = 0}$.

Bemerkung. Die Umkehrung gilt nicht!

z. B. $f(x) = x^3$, $x \in]-1, 1[$, $x_0 = 0$

$f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$



aber kein lokales Extremum an $x_0 = 0$!

Kor. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a, b \in \mathbb{R})$

Falls f auf $[a, b]$ differenzierbar ist, d.h auch stetig, dann kann das Max / Min von f nur an die Stellen $x_0 \in \{a, b\}$ oder mit $f'(x_0) = 0$ ~~[illegible]~~ sein.

Idee für den Satz:

$$f'(x_0) > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

$$\Downarrow$$

für x nah genug von x_0 ist

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

$\Rightarrow$ für $x > x_0$, nah genug,

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

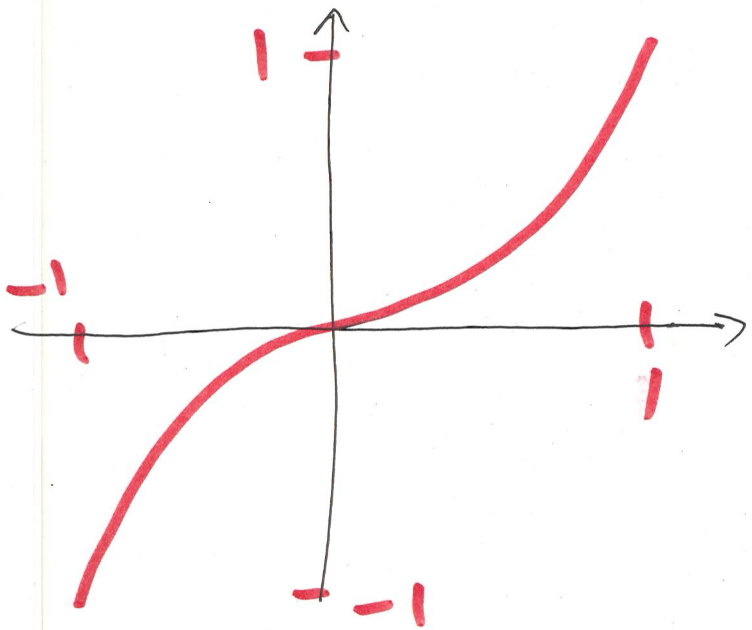
$$> 0$$

für $x < x_0$, nah genug

$$f(x) - f(x_0) < 0$$

Beispiele

(1) $f(x) = x^3, \quad -1 \leq x \leq 1$



$f'(x) = 3x^2$

$\Longrightarrow$ die Möglichkeiten für Max/Min von f sind -1, 1 und 0.

In diesem Fall $\left\{ \begin{array}{l} f(-1) = -1 \\ f(1) = 1 \\ f(0) = 0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ f hat Max. an $x_0 = 1$,

das Max. ist $f(1) = 1$;

f hat Min. an $x_0 = -1$,

das Min. ist $f(-1) = -1$.

(2) $\begin{cases} f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$

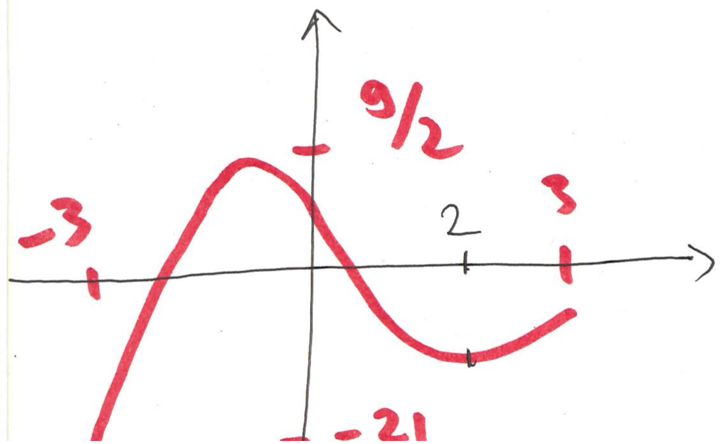
$\Rightarrow$ $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$

$$f'(x) = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

D.h. die Zahlen wo das Max/Min von f angenommen ist sind entweder $-1, 2, -3, 3$.

Es gilt:

$$\begin{cases} f(-1) = \frac{9}{2} & \textbf{Max.} \\ f(-3) = -\frac{43}{2} & \textbf{Min} \\ f(2) = -9 \\ f(3) = -7/2 \end{cases}$$

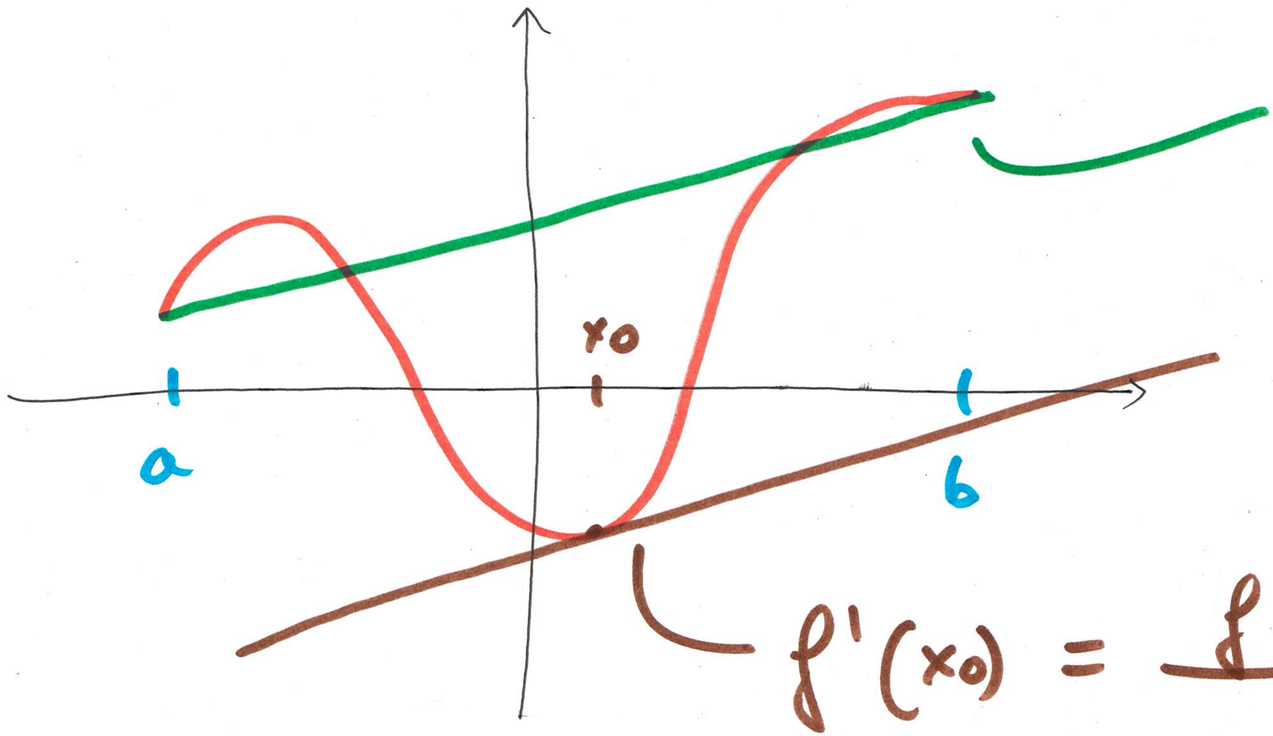


(Wir werden später sehen, wie man entscheidet, ob $x_0 = 2$ ein lok. Ext. ist oder nicht).

Satz (4.2.4)

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, und f auf $]a,b[$ differenzierbar. Es gibt $x_0 \in \,]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Steigung $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(⇒ die Tangente an $(x_0, f(x_0))$ und die Gerade durch $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ sind parallel.)

__Kor.__ (4.2.5).

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig,

auf $]a,b[$ differenzierbar

(1) $(\forall x, f'(x) = 0) \iff$ (f ist konstant)

(2) $(\forall x, f'(x) \geq 0) \iff$ (f ist monoton wachsend)

(3) $(\forall x, f'(x) \leq 0) \iff$ (f ist monoton fallend)

(4) $(\forall x, f'(x) > 0) \Longrightarrow$ (f <u>ist</u> <u>streng</u> monoton wachsend)

(in der Regel, nicht umgekehrt)

(5) $(\forall x, f'(x) < 0) \Longrightarrow$ (f ist streng fallend)

(6) Falls $\exists\ M \in [0, +\infty[$ mit

$\forall x,\ |f'(x)| \leq M$

$\Rightarrow \forall x, \forall y,\ |f(y) - f(x)| \leq M|x-y|$

Beweis vom Kor.

(1) $\left(\forall x,\ f'(x) = 0\right) \underset{\text{Satz 4.2.4}}{\Rightarrow} \exists x_0,\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0) = 0$

dies gilt auch für alle x, y in $[a,b]$ wenn wir den Satz für f auf $[x,y]$ benutzen.

(2)+(4) Seien $x < y$ in $[a,b]$,

wir erhalten $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x_0)$

für eine $x_0 \in]x, y[$, falls

$$\left\{\begin{matrix} f'(x_0) \geq 0 \\ f'(x_0) > 0 \end{matrix}\right\} \text{ folgt } \left\{\begin{matrix} f(y) \geq f(x) \\ f(y) > f(x) \end{matrix}\right.$$

(6) $f(y) - f(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \cdot (y - x)$

$\overset{(\text{Satz})}{=} f'(x_0)\ (y - x_0)$

47

$$|f(y) - f(x)| \;\cancel{\le}\!= \;|f'(x_0)|\,|y - x_0|$$

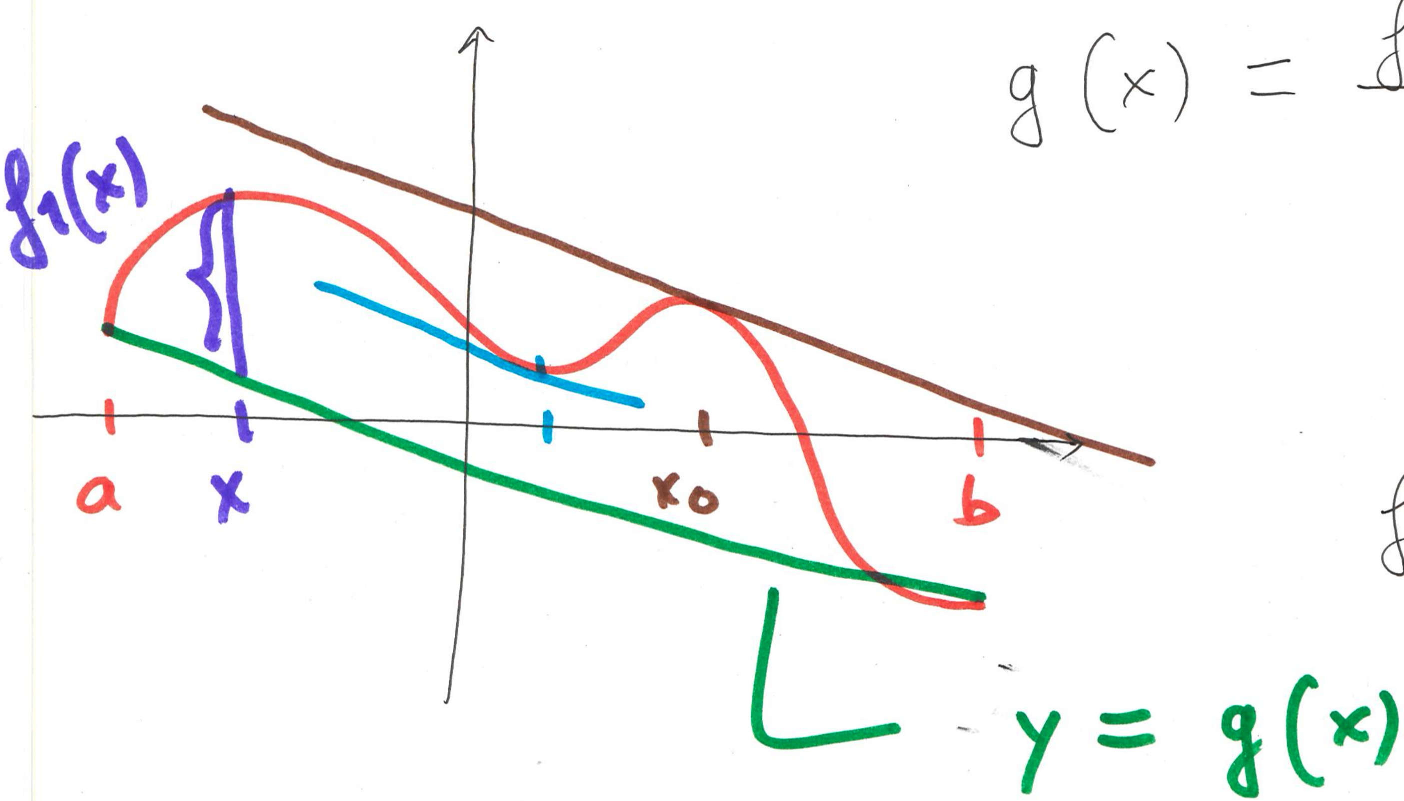
$$\le M\,|y - x_0|$$

<u>Idee für den Satz:</u> Sei

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

und

$$f_1(x) = f(x) - g(x)$$



Es gilt $f_1(a) = f_1(b) = 0$.

Die Funktion $f_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und hat dann ein Minimum / Maximum.

Seien u, v in $[a,b]$ die Zahlen mit

$$\forall x \in [a,b], \quad f_1(u) \leq f_1(x) \leq f_1(v)$$

Fall 1 : falls $u \in \,]a, b[$
(oder $v \in \,]a, b[$)

$\Rightarrow$ weil f_1 ein **lokales** Ext.
an u hat, folgt $f_1'(u) = 0$;
d.h. $f'(u) - g'(u) = 0$

$$\parallel$$

$$f'(u) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$\Rightarrow$ $x_0 = u$ ist OK.

Fall 2: falls $\{u, v\} \subset \{a, b\}$

folgt $f_1(u) = f_1(v)$ [weil $f_1(a) = f_1(b) = 0$]

$\Rightarrow \forall x,\ f_1(x) = f_1(u)$

$\Rightarrow f_1'(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in]a, b[$

Beispiele.

(1) $f(x) = e^x \,, \quad x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x > 0 \implies f$ ist auf $\mathbb{R}$ streng wachsend

(2)