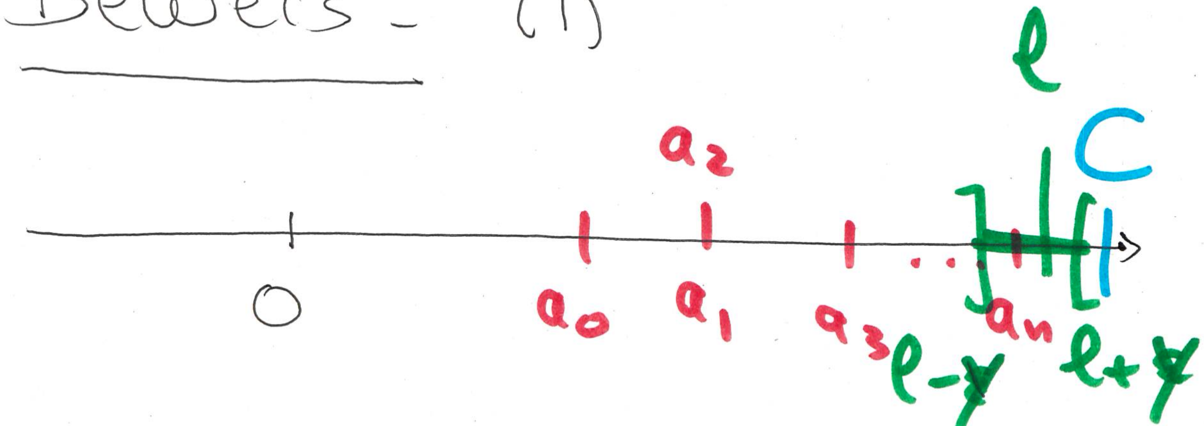
<u>Beweis</u> – (1)

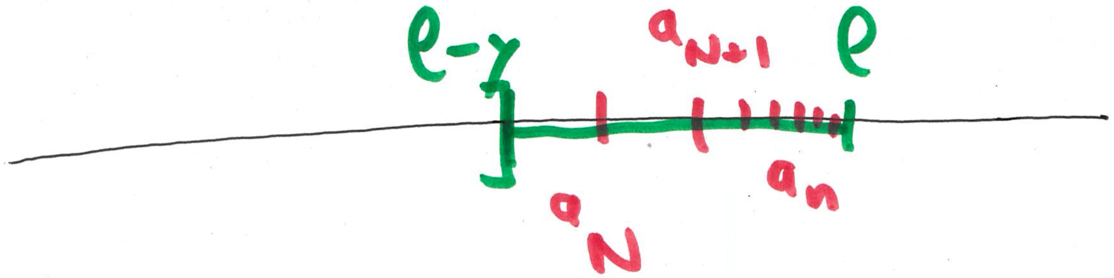


Sei $\underbrace{\ell = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\neq \emptyset,\ \text{von oben Beschränkt}}$

Sei $y > 0$; $\ell - y < \ell \implies \ell - y$ ist <u>nicht</u> eine obere Grenze der Menge $\{a_n\}$

$\implies \exists\, \underline{\underline{N}} \in \mathbb{N}$, $\ell - y < \underbrace{a_N \leq \ell}$

ℓ <u>ist</u> eine obere Schranke



$$\underbrace{\ell \geq a_{N+1}}_{\ell = \operatorname{Sup}\{a_n\}} \underset{(\text{Hyp.})}{\geq} a_N > \ell - y$$

$$\ell \geq a_{N+2} \geq a_{N+1} > \ell - y$$

$$\vdots$$

für $n \geq N$, $\quad \ell \geq a_n \geq a_N > \ell - y$

$\Rightarrow \forall n \geq N$, $\quad |a_n - \ell| < y$

Das bedeutet: $\boxed{\lim a_n = \ell}$

Beispiel. (2.2.3)

(1) $\left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z} \\ 0 \le q < 1 \end{array} \right.$

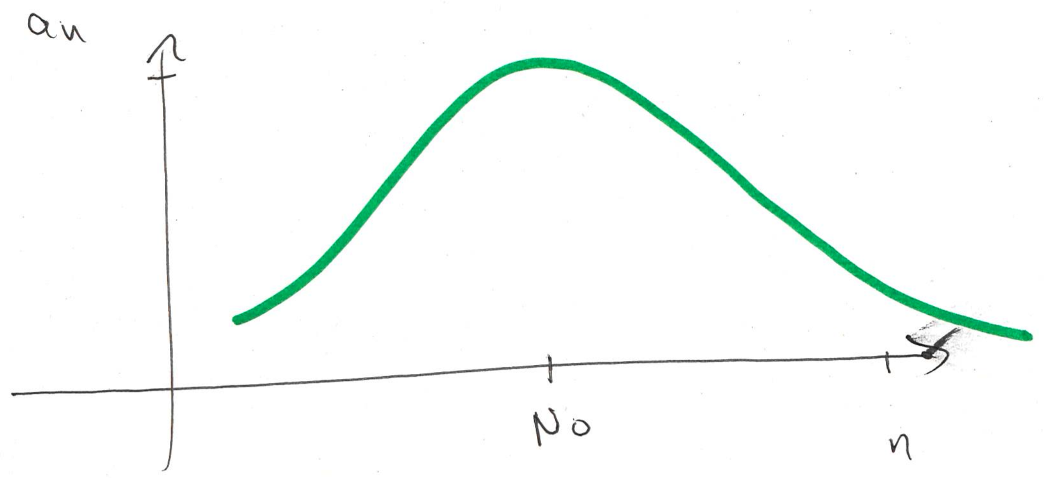
$$a_n = n^a q^n$$

(z.B. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$) $\left[\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{array} \right]$

oder $a_n = \frac{1}{3^n}$ $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ q = 1/3 \end{array} \right]$)

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} n^a q^n = 0}$$

(z.B. $\frac{n^{1000}}{2^n} \longrightarrow 0$)



Wir werden sehen: es gibt $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass $(a_n)_{n \geq N_0}$ <u>fallend</u> ist; weil $a_n \geq 0$, ist $(a_n)_{n \geq N_0}$ <u>konvergent</u>.

Dann ist (a_n) konvergent mit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \geq N_0}} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^a q^{n+1}}{n^a q^n}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a q .$$

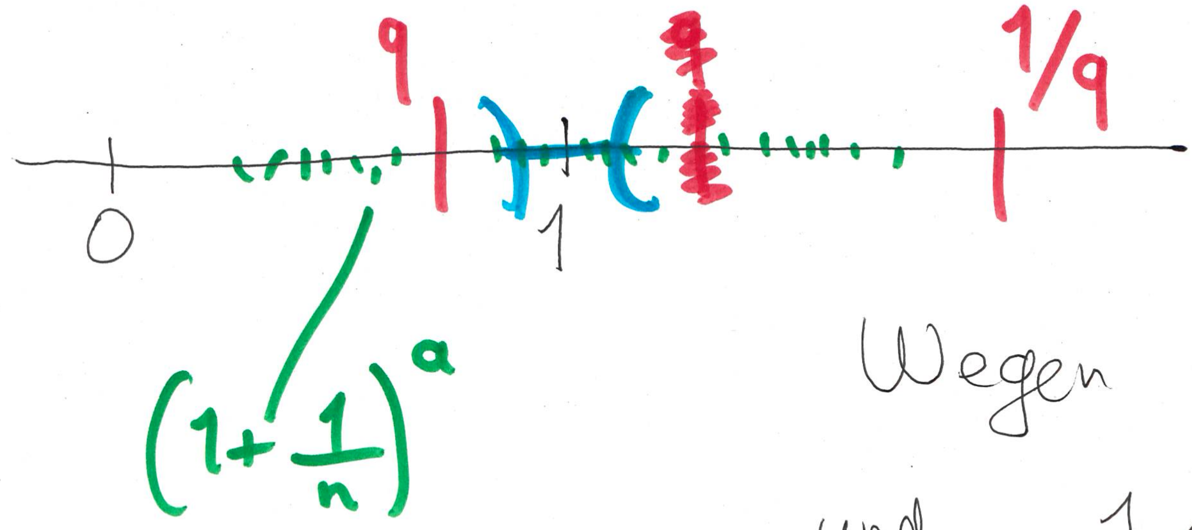
<u>$a = 0$:</u> $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 \implies$ Folge ist <u>fallend</u> für $n \geq 0$

<u>$a \neq 0$:</u> für $n \longrightarrow +\infty$,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{1}{1} = 1$$

$$\underbrace{1 \quad 0}_{} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1^a$$



$1/q > 1$

Wegen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^a \longrightarrow 1$

__und__ $1/q > 1$,

gibt es $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^a < \frac{1}{q}$$

für $n \geq N_0$.

D.h. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^a q < 1$$

für $n \geq N_0$

D.h. die $(a_n)_{\underline{\underline{n \geq N_0}}}$ ist fallend

$\longrightarrow$ <u>konvergent</u>.

Warum ist $\ell = \lim a_n = \lim\limits_{n \to \infty} n^a q^n$

$= 0$?

$$\ell \leftarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^a}_{\downarrow \, 1} \underbrace{q}_{\downarrow \, q}$$

$a_n \to \ell$

Falls $\ell \neq 0$

$\longrightarrow 1$

$\boxed{1 = q}$, <u>unmöglich</u>, d.h. $\boxed{\ell = 0}$

30

Beispiel. (2.2.8)

Sei $c > 1$. (z.B. $c = 2$)

Wir **definieren**

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), & n \geq 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{c=2} \\ &a_1 = 2 \\ &a_2 = \tfrac{1}{2}(2+1) \\ &\quad = \tfrac{3}{2} \\ &a_3 = \dots \end{aligned}}$$

Satz. Die Folge (a_n) konvergiert und

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{c}.$$

$\lfloor$

z.B. $\sqrt{2} = \lim a_n$, $a_n \in \mathbb{Q}$.

<u>Bemerkung.</u> Die Konvergenz ist "sehr schnell"!

<u>z.B.</u> $c = 2$, $|a_{10} - \sqrt{2}| < 10^{-700}$

(dies ist ein Beispiel des Newtonsche Algorismus).

<u>Beweis.</u> Wir werden <u>überprüfen</u>, dass die Folge <u>fallend</u> ist.

Wir nehmen das an.

Es ist klar, dass $a_n \geq 0$ (Induktion)

$$\left[a_1 = c \geq 0, \quad a_{n+1} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(a_n + \tfrac{c}{a_n}\right)}_{\geq 0} \right]$$

sodass (a_n) ist $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{fallend}} \\ \text{immer} \geq 0 \end{array} \right\}$, d.h.

sie konvergiert.

Sei $\ell = \lim a_n$; falls $\boxed{\ell > 0}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \quad & \quad\ \ \downarrow \qquad \downarrow \\ \ell &= \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{c}{\ell}\right) \end{aligned}$$

d. h. $\quad \ell = \frac{\ell}{2} + \frac{c}{2\ell}$

$$\Longleftrightarrow \frac{\ell}{\cancel{2}} = \frac{c}{\cancel{2}\ell}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\ell^2 = c} \Longrightarrow \boxed{\ell = \sqrt{c}}$$

Beweis, das $\underline{a_{n+1} \le a_n}$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) - \frac{2a_n}{2}$$

$$= \frac{a_n^2 - 2a_n^2 + c}{2a_n}$$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = \frac{c - a_n^2}{2\,a_n}}$$

und dann können wir überprüfen, dass

$$\boxed{a_n^2 > c}, \qquad n \geq 1$$

mit Induktion:

$$a_1^2 = c^2 > c, \quad \text{weil } a_1 = c > 1$$

und

$$a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$= \cancel{a_n^2} + (c - \cancel{a_n^2}) + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2$$

$$= c + \left(\frac{c - a_n^2}{2a_n}\right)^2 > c$$

für $n \geq 1$.

Wir sollten auch überprüfen, dass

$$\ell \left(= \lim a_n\right) > 0,$$

was folgt aus:

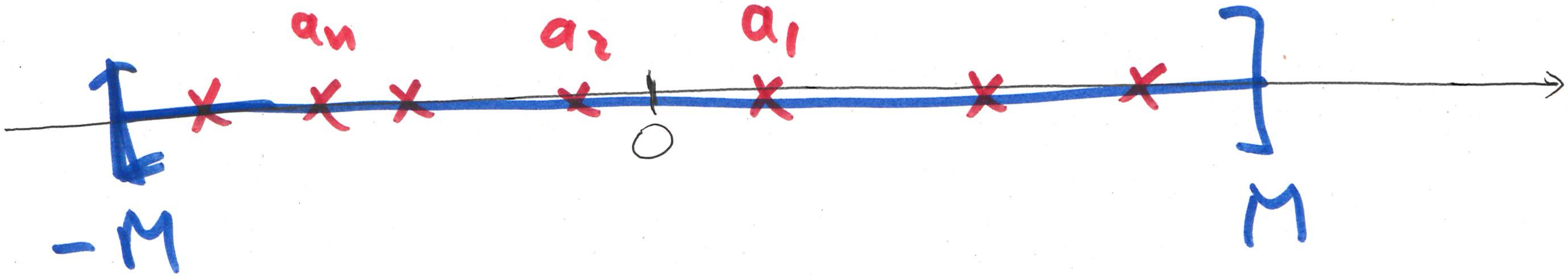
$$\begin{cases} a_n^2 > c > 1 \\ a_n > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_n > 1} \Rightarrow \boxed{\ell \geq 1}$$

2.3 – lim inf + lim sup

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen die **beschränkt** ist:

$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad |a_n| \leq M.$



Wir definieren Folgen

$(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$

durch:

Sei $k \in \mathbb{N}$

$$X_k = \{ a_n \mid n \geq k \} \subset \mathbb{R}$$

[d.h. $X_0 = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$X_1 = X_0$ "minus" a_0

$X_2 = X_0$ "minus" a_0, a_1

....]

[z.B. $a_n = (-1)^n$, $X_0 = \{-1, 1\}$

$X_1 = \{-1, 1\}$

$\vdots$

$X_k = \{-1, 1\}$]

$\forall k, \quad X_k \subset [-M, M]$

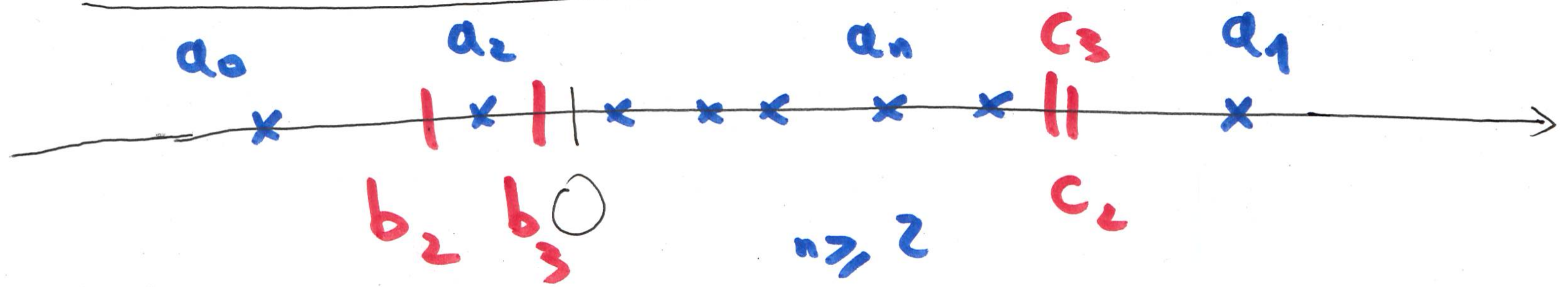
und $X_k \neq \emptyset \quad (a_k \in X_k)$

D. h. X_k hat

$\left\{ \begin{array}{l} \text{ein Supremum } c_k \\ \text{ein Infimum } b_k \end{array} \right.$

Das bedeutet insb.:

$$\boxed{\forall n \geq k, \qquad b_k \leq a_n \leq c_k}$$



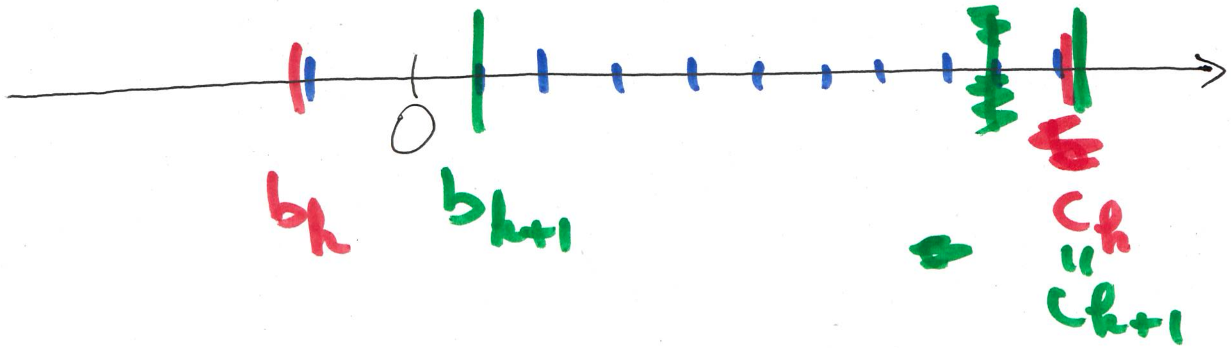
[z. B. $a_n = (-1)^n$, $X_k = \{-1, 1\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_k = -1 \\ c_k = 1 \end{cases}$$]

Sei $k \in \mathbb{N}$: es gilt

$$X_{k+1} \subset X_k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_{k+1} \geq b_k & \text{(Infimum)} \\ c_{k+1} \leq c_k & \text{(Supremum)} \end{cases}$$



__D. h.__

(b_k) ist __wachsend__

und $b_k \le M$ für $k \in \mathbb{N}$

($b_k = \cancel{\sup}\ \inf X_k$ und $X_k \subset [-M, M]$)

(c_k) ist __fallend__

und $c_k \ge -M$ für $k \in \mathbb{N}$

__und__ $b_k \le c_k$ für $k \in \mathbb{N}$

Def.

$$\liminf (a_n) = \lim_{n\to\infty} b_k,$$

$$\limsup (a_n) = \lim_{n\to\infty} c_k.$$

Es folgt $\boxed{\liminf (a_n) \leq \limsup (a_n)}$

z. B. $a_n = (-1)^n$

$b_k = -1 \implies \liminf = -1$

$c_k = 1 \implies \limsup = 1$

Vorsicht! $\liminf$ oder $\limsup$ $(a_n + b_n)$ oder $(a_n \cdot b_n)$ ist **nicht**

immer $\liminf(a_n) + \liminf(b_n)$

(oder $\limsup(a_n) \cdot \limsup(b_n)$, ...)

z. B.

$$\limsup \big(\underbrace{(-1)^n + (-1)^{n+1}}_{0} \big) = 0$$

$$\neq$$

$$\underbrace{\limsup (-1)^n}_{1} + \underbrace{\limsup (-1)^{n+1}}_{1}$$
$$1 + 1$$

2.4. Das Cauchy Kriterium

Ziel: ein Kriterium für Konvergenz **für alle** Folgen, die kein Vorwissen dem Grenzwert braucht.

Schritt 1. (a_n) reelle Folge konvergiert

(2.4.1)

$$\Updownarrow$$

(a_n) ist beschränkt und $\boxed{\liminf a_n = \limsup a_n}$

__Beweis.__ $\Rightarrow$ sei $\ell = \lim a_n$,

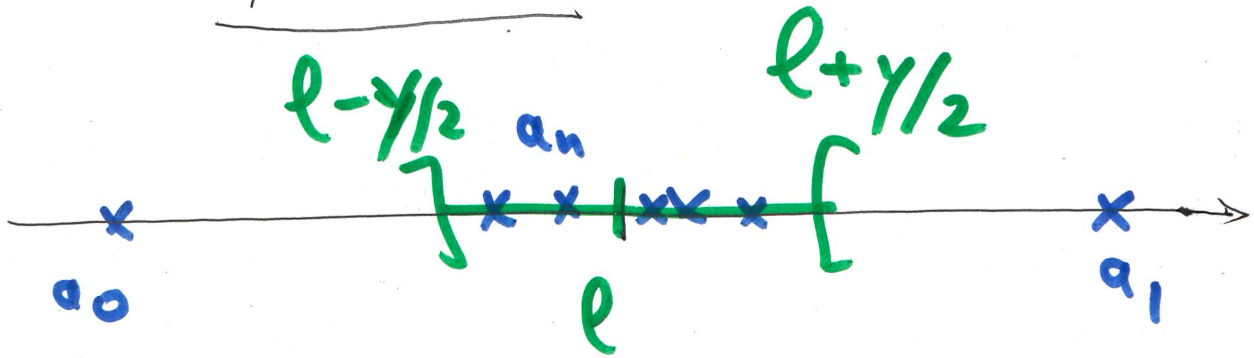
wir werden sehen dass

$$\liminf a_n = \boxed{\ell = \limsup a_n}.$$

Sei $\underline{\gamma > 0}$, sei $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$|a_n - \ell| < \frac{\gamma}{2}$$

für $n \geq N$.



Sei $k \geq N$; dann ist

$$X_k \subset \left]\ell - \frac{\gamma}{2}, \ell + \frac{\gamma}{2}\right[$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} c_k = \sup(X_k) \leq l + \frac{y}{2} \\ \vee\!| \\ b_k = \inf(X_k) \geq l - \frac{y}{2} \end{array}$$

für **alle** $k \geq N$. Für $k \geq N$ folgt:

$$l - y < l - \frac{y}{2} \leq b_k \leq c_k \leq l + \frac{y}{2} < l + y$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} |c_k - l| < y \\ |b_k - l| < y \end{array}\right\} \text{ für } \underline{k \geq N.}$$

D. h.

$$\underset{\liminf a_n}{\underset{\shortparallel}{\lim b_k}} = \underset{\limsup a_n}{\underset{\shortparallel}{\lim c_k}} = l.$$