$\Uparrow$: wir nehmen an, (a_n) ist beschränkt,

und $\liminf(a_n) = \limsup(a_n)$.

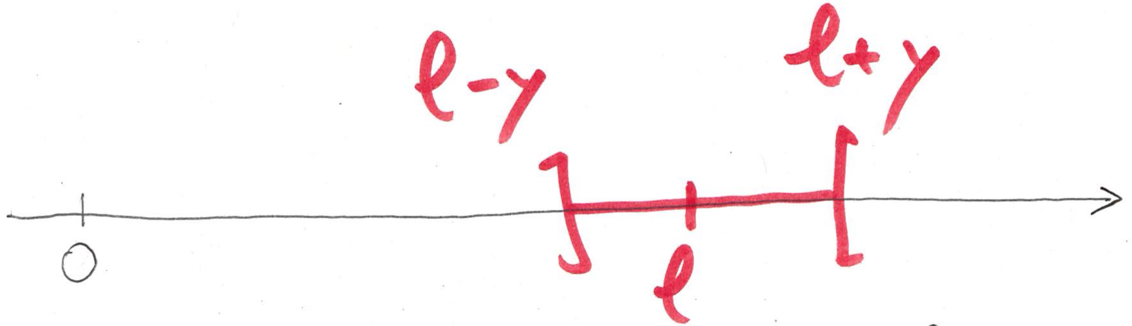
Wir werden überprüfen dass

$\lim a_n$ existiert

und ist gleich $\liminf = \limsup$.

Wir bezeichnen $\ell = \liminf(a_n) = \limsup(a_n)$.

Sei $\gamma > 0$.



Seit $\liminf(a_n) = \ell$, folgt : $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$

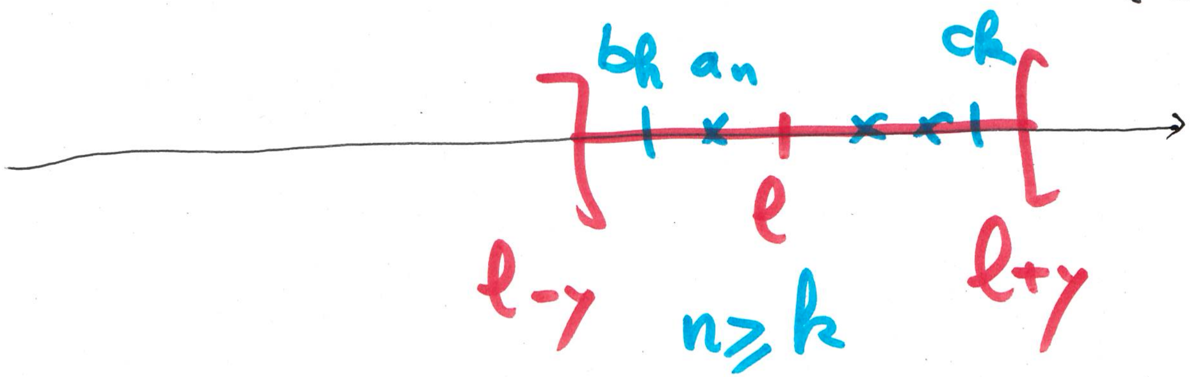
sodass $|b_k - \ell| < \gamma$ für $k \geq N_1$.

Seit $\limsup(a_n) = l$, —— $\exists\, N_2 \in \mathbb{N}$

—— $|c_k - l| < y$ —————— $k \geq N_2$.

Insbesondere: für $k \geq \max(N_1, N_2) = N$

$$l - y < \underbrace{b_k \leq a_k}_{\substack{\text{weil} \\ a_k \in X_k \\ \text{und } b_k = \operatorname{Inf}(X_k)}} \leq \overbrace{c_k}^{c_k = \operatorname{Sup}(X_k)} < l + y$$



D.h.

$|a_k - l| < 2y$
für $k \geq N$

D. h. $\lim a_k$ existiert und ist $= \ell$.

$\square$

Schritt 2 –

Satz – (Cauchy Kriterium)
(2.4.2) Eine Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert

$\Longleftrightarrow$

$\forall \gamma > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geq N, \forall n \geq N,$
$|a_m - a_n| < \gamma$

Bem: dies ist auch eine Version der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Beweis. $\Rightarrow$: Übung (siehe Skript)

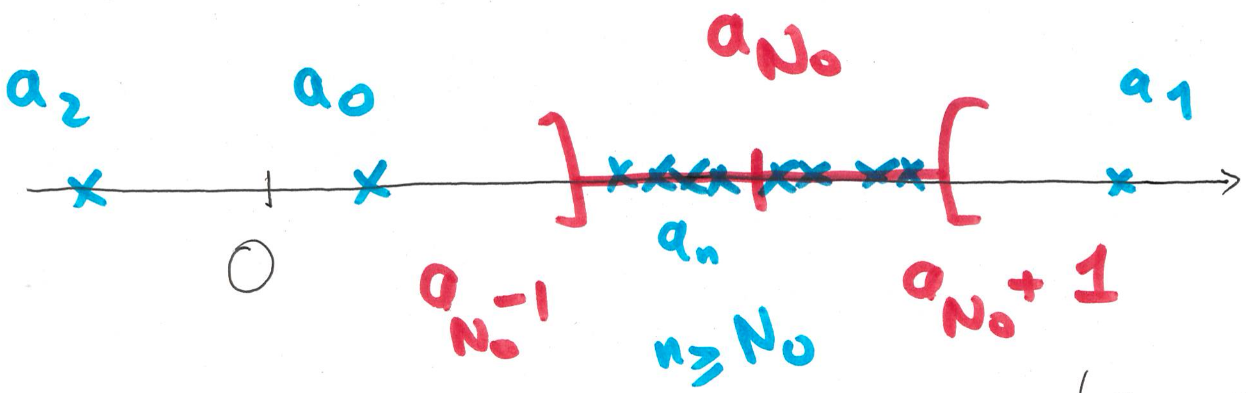
$\Leftarrow$: **Hypothese:**

$\forall \gamma > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \gamma)$

Wir benutzen Schritt 1 um die Konvergenz zu beweisen:

1. (a_n) ist beschränkt, ✓
2. $\liminf(a_n) = \limsup(a_n)$

1



$\gamma = 1$, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$|a_n - a_m| \leq 1$ für $n, m \geq N_0$

$\underline{m = N_0} \implies |a_n - a_{N_0}| \leq 1$ für $n \geq N_0$

Die Folge ist beschränkt: für <u>alle</u> $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq \underbrace{\max\left(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N_0-1}|, |a_{N_0}+1|, |a_{N_0}-1|\right)}_{\text{reelle Zahl}}$$

2

~~Sei $y > 0$.~~

Sei $D = |\limsup(a_n) - \liminf(a_n)|$

≥ 0

Ziel : $D = 0$

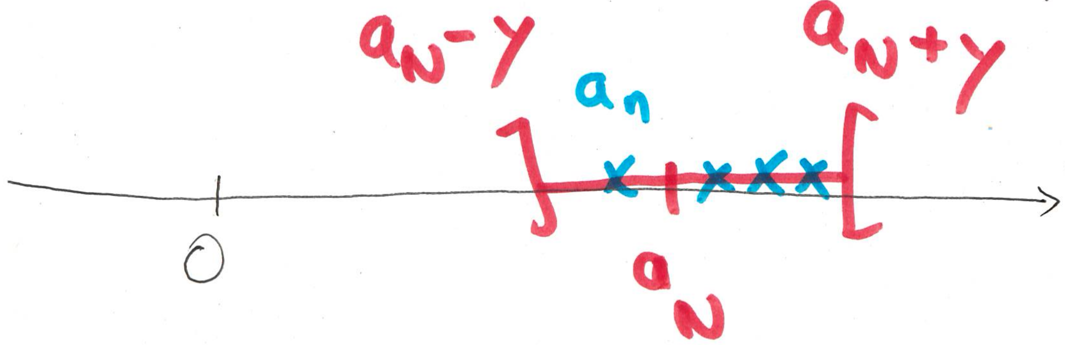
Es ist genug, zu überprüfen :

$$\boxed{\forall y > 0, \quad 0 \leq D < y}$$

(Weil nur $y = 0$ hat diese Eigenschaft)

Sei $y > 0$: $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $\forall m \geq N$, $|a_n - a_m| < y$.

Sei $m = N$; $|a_n - a_N| < y$ für $n \geq N$.



Es folgt:

Für $k \geq N$, $x_k \subset \,]a_N - y, a_N + y[$.

$\Rightarrow \quad \operatorname{Inf}(X_k) \geq a_N - y$

$\operatorname{Sup}(X_k) \leq a_N + y$

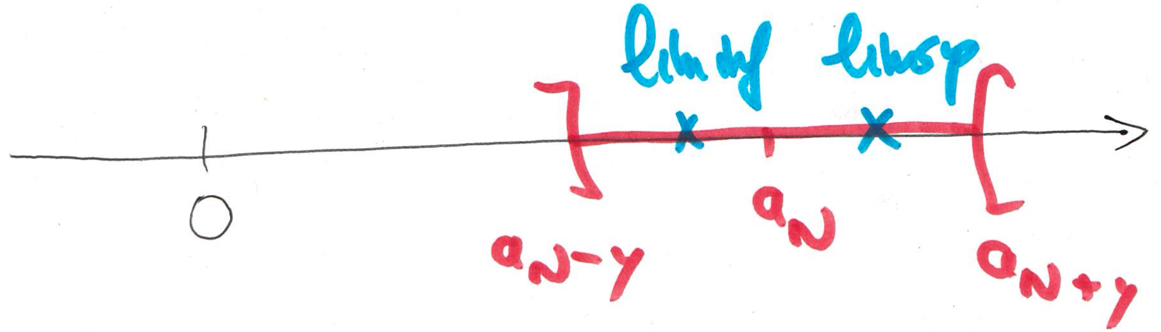
$\Rightarrow \quad a_N - y \leq b_k \leq c_k \leq a_N + y$

(für $k \geq N$)

$\Rightarrow \quad a_N - y \leq \lim b_k \leq \lim c_k \leq a_N + y$

$(k \to +\infty)$

d.h. $\quad a_N - y \leq \liminf(a_n) \leq \limsup(a_n) \leq a_N + y$



$\Rightarrow \quad 0 \leq D \leq 2y$

Weil γ ist eine beliebige > 0 Zahl, folgt dass $D = 0$.

$\square$

Beispiel.

(1) Sei

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$(n \geq 1)$

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{3}{2}$

$a_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \ldots$

Die Folge ist <u>wachsend</u>

$$\left(a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} > 0\right)$$

d.h. (a_n) konvergiert g.d.w. sie ist <u>beschränkt</u>.

Wir werden sehen, dass das Cauchy Kriterium <u>nicht</u> erfüllt ist

$\Rightarrow$ sie konvergiert <u>nicht</u>.

CK: $\forall \gamma > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \forall m,$

$$(n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \gamma)$$

Negativ:

$$\exists \gamma > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \exists m,$$

$$(n \geq N, m \geq N, \text{ aber } |a_n - a_m| \geq \gamma)$$

Sei $m > n$:

$$a_m - a_n = \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{m-n \text{ Zahlen}}$$

$$\geq \underbrace{(m-n)}_{\text{Anzahl der Zahlen die wir addieren}} \cdot \underbrace{\frac{1}{m}}_{\text{kleinste Zahl}}$$

$$|a_m - a_n| \geq \frac{m-n}{m}$$

Sei $m = 2n$, $n \geq 1$; dann ist

$$|a_{2n} - a_n| \geq \frac{2\cancel{n} - \cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$$

<u>D.h.</u> wir können $\gamma = \frac{1}{2}$ nehmen, und für jede $N \geq 1$, $n = N$, $m = 2N$

$$\boxed{\forall N \geq 1, \qquad |a_{2N} - a_N| \geq \frac{1}{2}.}$$

Das Cauchy Kriterium ist <u>nicht</u> erfüllt!

2 Seien $\begin{cases} (a_n) \\ (b_n) \text{ fallend} \end{cases}$ Folgen mit

$$|a_{n+1} - a_n| \leq b_n - b_{n+1}.$$

Falls (b_n) <u>konvergiert</u>, ist (a_n) <u>konvergent</u>.

Warum?

Cauchy - Kriterium für (a_n): $m > n$

$$|a_m - a_n| = \Big|(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + (a_{m-2} + \dots + (a_{n+1} - a_n)\Big|$$

$$\overset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n|$$

$$\overset{\text{Hypothese}}{\leq} \cancel{b_{m-1}} - b_m + b_{m-2} - \cancel{b_{m-1}} + \dots \cancel{} + b_n - \cancel{b_{n+1}}$$

d. h.

$$|a_m - a_n| \leq \overbrace{b_n - b_m}^{|b_n - b_m| \atop \shortparallel}$$

(b_n) konvergiert $\Rightarrow$ das Cauchy Kriterium ist erfüllt für $|b_n - b_m|$

$$\Rightarrow \forall \gamma > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \left(n, m \geq N \Rightarrow |b_n - b_m| < \gamma\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall \gamma > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \gamma}$$

$\boxed{\text{C-Krit. für } (a_n)}$

61

z. B. falls $b_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$; fallend und konvergent

$\rightsquigarrow$ wenn

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

ist (a_n) konvergent.

z. B. Sei: $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \geq 1$$

sodass diese Folge konvergiert.

Man kann zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$$

("das Basel Problem")
Bernoulli / Euler

<u>Bemerkung</u>- $\overset{a_n}{\cancel{}} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$

(a_n) konvergiert; ob $\lim a_n$ etwas mit π zu tun, weiss man nicht!

2.5. Satz von Bolzano-Weierstrass

(a_n) Folge reeller Zahlen, **beschränkt**; konvergiert **nicht** immer

z.B. $a_n = (-1)^n$

$$\begin{cases} a_{2n} = 1 & \longrightarrow \text{konvergiert} \\ a_{2n+1} = -1 & \longrightarrow \text{konvergiert} \end{cases}$$

Man sagt dass $(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine **konvergente** **Teilfolge**.

Satz (2.5.9) (Bolzano – Weierstrass)

Jede beschränkte Folge hat (mindestens) eine konvergente Teilfolge

Def. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge.

Eine Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heisst **Teilfolge** von (a_n) wenn es gibt

$$t : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

sodass
(1) $b_k = a_{t(k)}$
(2) $t(k+1) > t(k)$.

z.B.
$t(k) = 2k$
oder
$t(k) = 2k+1$

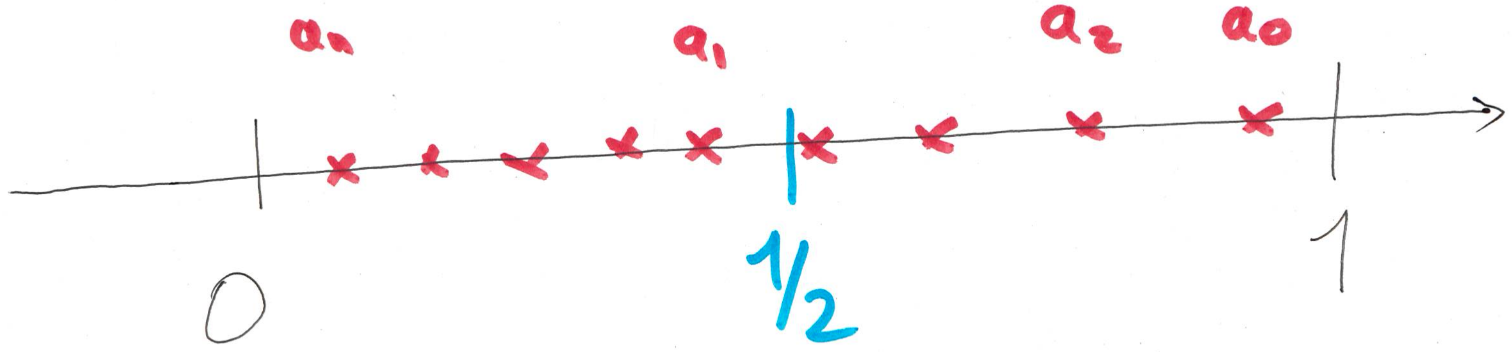
(d.h. $b_1 = a_{f(1)}$

$b_2 = a_{f(2)}$, $\quad f(2) > f(1)$

$\vdots$)

Beweis – (Idee) Wir nehmen an:

$$0 \leq a_n \leq 1$$



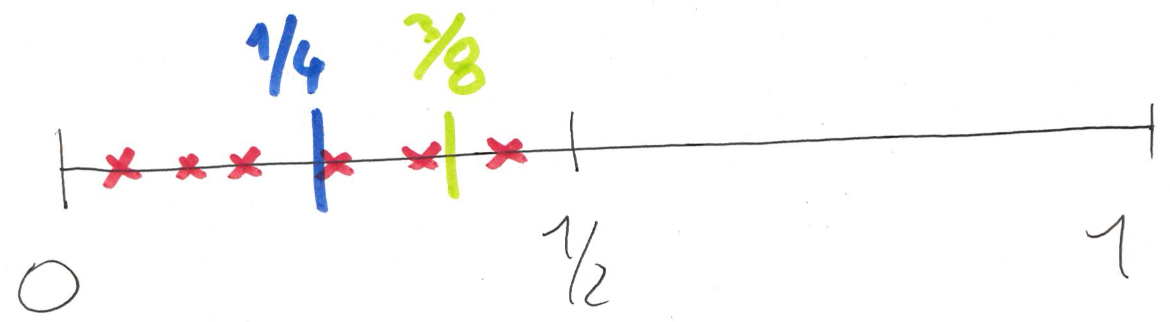
Entweder : 1 es gibt unendlich viele

n mit $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$

oder : 2 ______________________

______________ $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 1$

z. B. Fall 1 gilt



Entweder unendlich viele n mit $0 \leq a_n \leq 1/4$ oder mit $1/4 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$

Durch Induktion: wir finden Folgen

$$0 \leq b_k \leq c_k \leq 1, \quad c_k - b_k = \frac{1}{2^k}$$

sodass
$$\begin{cases} b_k \leq b_{k+1} \\ c_{k+1} \leq c_k \end{cases}$$

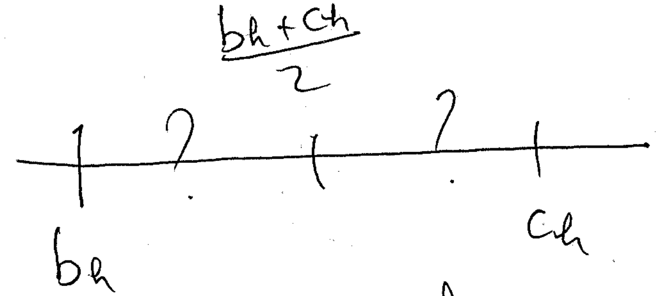
und es gibt unendlich viele n mit

$$b_k \leq a_n \leq c_k$$

[z.B. $b_1 = 0, \quad c_1 = \frac{1}{2}$

$b_2 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2}$

...]



Wir können dann eine <u>Teilfolge</u> (x_k) definieren mit $x_k \in [b_k, c_k]$.

Weil $|c_k - b_k| \leq \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

folgt: (x_k) <u>konvergiert</u>.