Serie 3

VEKTORRÄUME, LINEARE ABBILDUNGEN, MATRIZEN

---

12. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt:

(a) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear abhängig, dann lässt sich *mindestens einer der Vektoren* $\vec{v}_j$ als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben, d.h. es existiert j mit $1 \leqslant j \leqslant k$, sodass gilt:

$$\vec{v}_j = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

(b) Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig, dann lässt sich *keiner der Vektoren* $\vec{v}_j$ als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben, d.h. für alle j mit $1 \leqslant j \leqslant k$ gilt:

$$\vec{v}_j \neq \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

(c) Ist $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$, dann ist

(i) $k = n$, und

(ii) jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich *eindeutig* als Linearkombination $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{v}_i$ schreiben.

13. Seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_6 \in \mathbb{R}^4$ die folgenden Vektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^4$?

(a) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6\}$ (c) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ (e) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5, \vec{v}_6\}$

(b) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$ (d) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5, \vec{v}_6\}$ (f) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_6\}$

14. Entscheiden Sie für die folgenden Abbildungen, ob es sich um lineare Abbildungen handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Matrix, welche die entsprechende lineare Abbildung darstellt.

(a)
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^1 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} y-3z \\ z-y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+z \\ 2x-2y+3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

15. Berechnen Sie die Matrix A:

$$A = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

16. Entscheiden Sie, ob die folgende Matrix A eine Inverse hat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -2 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$