Serie 4

Lineare Gleichungssysteme, Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

---

17. Invertieren Sie die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ 3\,x_1 & - & 2\,x_2 & - & x_3 & = & b_3 \end{array}$$

für

(a) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

18. Berechnen Sie die Determinante der folgenden beiden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ 8 & 7 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

19. Berechnen Sie jeweils die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden (2×2)-Matrizen.

(a) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Jede der drei Matrizen hat zwei verschiedene Eigenwerte.