

Serie 5

VEKTORFELDER UND LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME

20. Ordnen Sie die folgenden vier Funktionen den vier Vektorfeldern zu:

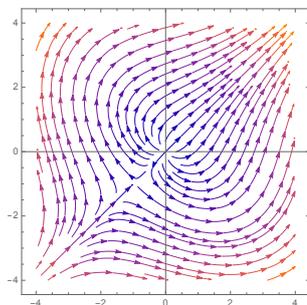
(a) $f((x, y)) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$

(c) $f((x, y)) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x^2 + y \end{pmatrix}$

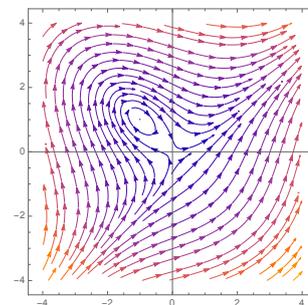
(b) $f((x, y)) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x^2 - y \end{pmatrix}$

(d) $f((x, y)) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(y^2) \end{pmatrix}$

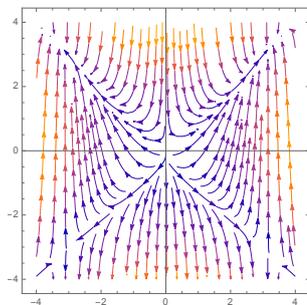
(A)



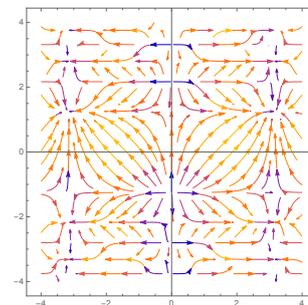
(C)



(B)



(D)



21. (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld welches zu folgender autonomen Differentialgleichung gehört:

$$y' = \sin(y) - \frac{1}{2}$$

(b) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslösungen dieser Differentialgleichung.

22. Berechnen Sie jeweils die Lösung der folgenden Differentialgleichungssysteme für die gilt $x(0) = y(0) = 1$.

$$(a) \quad \begin{aligned} 8x(t) - y(t) &= \dot{x}(t) \\ -2x(t) + 7y(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} 4x(t) - 2y(t) &= \dot{x}(t) \\ -4x(t) + 2y(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} x(t) + 4y(t) &= \dot{x}(t) \\ -x(t) + y(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned}$$

Hinweis: Vergleiche mit Aufgabe 19: Die Eigenwerte und ihre zugehörigen Eigenvektoren der gegebenen Matrizen sind:

$$(a) \quad \lambda_1 = 6, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda_2 = 9, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda_2 = 6, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \lambda_1 = 1 + 2i, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} \text{ und } \lambda_2 = 1 - 2i, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}$$