Musterlösung Serie 1

DIFFERENZENGLEICHUNGEN UND DIFFERENTIALGLEICHUNG DER HARM. SCHWINGUNG

---

1. (a) Finden Sie die explizite Formel zur Berechnung der Fibonacci-Zahlen a_n, wobei die Fibonacci-Zahlen durch folgende Differenzengleichung gegeben sind:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \text{mit} \quad a_0 = a_1 = 1$$

(b) Der *goldene Schnitt* φ ist definiert als die positive reelle Zahl welche die Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$ erfüllt. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \varphi$$

Lösung:

(a) Wir suchen zuerst die Fundamentallösungen der rekursiven Gleichung

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

mit dem Ansatz $a_n = x^n$ für eine reelle Zahl x. Nun können wir den Ansatz in die rekursive Gleichung einsetzten. Wegen $a_0 = 1$, gilt $x \neq 0$, also können wir die Gleichung durch x^n teilen und erhalten

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Mit der Auflösungsformel für quadratische Gleichungen erhalten wir schliesslich

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

und daraus schliessen wir, dass die allgemeine Lösung der Differenzengleichung die folgende Form hat

$$a_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind. Diese können wir nun bestimmen, da wir die Anfangswerte von a_n für $n = 0, 1$ kennen. Wir erhalten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 &= c_1 + c_2 = 1 \\ a_1 &= c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1. \end{aligned}$$

Lösen wir die obere Gleichung nach c_1 auf, so erhalten wir $c_1 = 1 - c_2$. Setzten wir dies in die zweite Gleichung ein, dann bekommen wir

$$c_1 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + (1-c_1) \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1,$$

wobei wir die Gleichung wie folgt umformen können:

$$\sqrt{5}c_1 = 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Teilen wir nun durch $\sqrt{5}$, so erhalten wir $c_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$ und somit auch $c_2 = 1 - c_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Die explizite Formel für die Berechnung der Fibonacci-Zahlen lautet also

$$a_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

(b) Beachte, dass $|\frac{1-\sqrt{5}}{2}| < 1$ und somit verschwindet die zweite Fundamentallösung, sofern der Grenzwert existiert und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1}{c_1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Tatsächlich gilt auch

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1,$$

also erfüllt $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ auch die Gleichung $\varphi^2 = \varphi + 1$.

2. (a) Finden Sie die explizite Formel für a_n, wobei a_n durch folgende Differenzengleichung gegeben ist:

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \qquad \text{mit} \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2$$

(b) Berechnen Sie a_2 und a_3 sowohl mit der expliziten Formel wie auch mit der rekursiven Formel.

Lösung:

(a) Wir berechnen zuerst die Fundamentallösungen der Differenzengleichung $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$, wobei wir wieder den Ansatz $a_n = x^n$ verwenden. Wir lösen also zuerst die Gleichung $x^2 - x + 1 = 0$ nach x auf mit der Mitternachtsformel und erhalten dabei

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Also sieht die allgemeine Lösung wie folgt aus:

$$a_n = c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n.$$

Dabei gilt wieder $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ wobei die Konstanten anhand der Anfangsbedingungen bestimmt werden können:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= c_1 + c_2 = 1 \\
a_1 &= c_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) + c_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right) = 2.
\end{aligned}
$$

Die erste Gleichung können wir nach c_2 auflösen und mit $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ multiplizieren. Wir erhalten dann $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}c_2 = (1-c_1)\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, was wir in die untere Gleichung einsetzten können. Formen wir die zweite Gleichung um, sodass alle Terme mit c_1 multipliziert auf der linken Seite stehen und alle anderen Terme auf der rechten Seite, so erhalten wir

$$
\sqrt{3}ic_1 = 2 - \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{3+\sqrt{3}i}{2} = \frac{\left(-\sqrt{3}i\right)\cdot\left(3+\sqrt{3}i\right)}{-2\sqrt{3}i} = \frac{-3\sqrt{3}i+3}{-2\sqrt{3}i}.
$$

Somit ist

$$
c_1 = \frac{-3\sqrt{3}i+3}{6} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}
$$

und

$$
c_2 = 1 - c_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}.
$$

Die Lösung der Differenzengleichung ist also

$$
a_n = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n
$$

Bemerkung: Obwohl i in der expliziten Formel der obigen Differenzengleichung vorkommt, verschwindet es für jede Wahl von $n \in \mathbb{N}$.

(b) Mit der rekursiven Formel erhalten wir

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 - a_0 = 2 - 1 = 1 \\
a_3 &= a_2 - a_1 = 1 - 2 = -1
\end{aligned}
$$

und mit der expliziten

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}\left((1+3)\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right) + (1+3)\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)\right) = 1 \\
a_3 &= \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3 + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{16}\left((1+3)\cdot\left(1+\sqrt{3}i\right)^2 + (1+3)\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\left(1+\sqrt{3}i\right)^2 + \left(1-\sqrt{3}i\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\left(1-3\right)\right) = -1.
\end{aligned}
$$

3. (a) Finden Sie die explizite Formel für a_n, wobei a_n durch folgende Differenzengleichung gegeben ist:

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \qquad \text{mit} \quad a_0 = 1,\ a_1 = 2$$

(b) Berechnen Sie a_2, a_3, a_4 sowohl mit der expliziten Formel wie auch mit der rekursiven Formel.

Lösung:

(a) Gesucht sind die Fundamentallösungen der Differenzengleichung $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$, wobei wir wieder den Ansatz $a_n = x^n$ verwenden. Da $x^2 - 6x + 9 = 0$ faktorisierbar ist, erhalten wir auch $(x-3)^2 = 0$ und somit ist $x = 3$ die einzige Lösung der quadratischen Gleichung. Die allgemeine Lösung sieht wie folgt aus:

$$a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n.$$

Dabei gilt wieder $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ wobei die Konstanten anhand der Anfangsbedingungen bestimmt werden können:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_1 = 1 \\ a_1 &= 3c_1 + 3c_2 = 2. \end{aligned}$$

Setzten wir c_1 in der zweiten Gleichung ein und lösen nach c_2 auf, so erhalten wir $c_2 = -\frac{1}{3}$. Die allgemeine Lösung ist also

$$a_n = 3^n - n \cdot 3^{n-1}.$$

(b) Mit der rekursiven Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} a_2 &= 6a_1 - 9a_0 = 6 \cdot 2 - 9 \cdot 1 = 3 \\ a_3 &= 6a_2 - 9a_1 = 6 \cdot 3 - 9 \cdot 2 = 0 \\ a_4 &= 6a_3 - 9a_2 = 6 \cdot 0 - 9 \cdot 3 = -27 \end{aligned}$$

und mit der expliziten

$$\begin{aligned} a_2 &= 3^2 - 2 \cdot 3^{2-1} = 3 \\ a_3 &= 3^3 - 3 \cdot 3^{3-1} = 0 \\ a_4 &= 3^4 - 4 \cdot 3^{4-1} = -27. \end{aligned}$$

4. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der obigen Differenzialgleichung ist $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$. Wenn wir diese Gleichung faktorisieren, so erhalten wir $(\lambda + 4)(\lambda + 1) = 0$. Wir sehen also, dass $\lambda = -1, -4$ gelten muss. Die zugehörige allgemeine Lösung sieht nun wie folgt aus:

$$y = Ae^{-t} + Be^{-4t},$$

wobei A, B reelle Konstanten sind. Wir berechnen nun noch die erste Ableitung von y:

$$\dot{y} = -Ae^{-t} - 4Be^{-4t}$$

Anhand der Anfangsbedingungen können wir nun die Konstanten A, B bestimmen:

$$\begin{aligned} y(0) &= A + B = 0 \\ \dot{y}(0) &= -A - 4B = 1 \end{aligned}$$

Addieren wir die beiden Gleichungen, so erhalten wir $-3B = 1$ und daraus schliessen wir $B = -\frac{1}{3}$. Die erste Gleichung liefert nun $A = -B = \frac{1}{3}$. Somit ist die Lösung der Differentialgleichung

$$y = \tfrac{1}{3}e^{-t} - \tfrac{1}{3}e^{-4t}.$$

5. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der obigen Differenzialgleichung ist $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Faktorisieren wir diese Gleichung, so erhalten wir $(\lambda - 3)^2 = 0$. Somit gibt es nur eine Lösung $\lambda = 3$ und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$y = Ae^{3t} + Bte^{3t},$$

wobei A, B wieder reell sind. Die erste Ableitung von y ist

$$\dot{y} = 3Ae^{3t} + 3tBe^{3t} + Be^{3t}.$$

Anhand der Anfangsbedingungen können wir nun die Konstanten A, B bestimmen:

$$\begin{aligned} y(0) &= A = 0 \\ \dot{y}(0) &= 3A + B = 1 \end{aligned}$$

Da $A = 0$, sehen wir bei der zweiten Gleichung sofort, dass $B = 1$ gilt. Somit ist die Lösung der Differentialgleichung

$$y = te^{3t}.$$

6. Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der obigen Differenzialgleichung ist $\lambda^2+4\lambda+5 = 0$. Mit der Mitternachtsformel erhalten wir $\lambda = \frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm i$. Somit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y = A\cos(t)e^{-2t} + B\sin(t)e^{-2t} = (A\cos(t) + B\sin(t))\,e^{-2t},$$

wobei A, B reell sind. Die erste Ableitung von y ist

$$\begin{aligned}\dot{y} &= (-A\sin(t) + B\cos(t))\,e^{-2t} - 2\,(A\cos(t) + B\sin(t))\,e^{-2t} \\ &= ((B-2A)\cos(t) - (A+2B)\sin(t))\,e^{-2t}.\end{aligned}$$

Anhand der Anfangsbedingungen können wir nun die Konstanten A, B bestimmen:

$$\begin{aligned}y(0) &= A = 0 \\ \dot{y}(0) &= B - 2A = 1\end{aligned}$$

Da $A = 0$, sehen wir bei der zweiten Gleichung, dass $B = 1$ gilt. Somit ist die Lösung der Differentialgleichung

$$y = \sin(t)e^{-2t}.$$