Musterlösung Serie 2

FOURIER-REIHEN

7. Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$ gilt:

(a)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx)\, dx = 0$$

(b)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\, dx = 0$$

Lösung:

(a) Wir verwenden zweimal partielle Integration und erhalten:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(mx)}_{\text{integrieren}} \cdot \underbrace{\cos(nx)}_{\text{ableiten}}\, dx &\overset{p.I.}{=} \underbrace{\left[\frac{1}{m}\sin(mx)\cdot\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{n}{m} \underbrace{\sin(mx)}_{\text{integrieren}} \cdot \underbrace{\sin(nx)}_{\text{ableiten}}\, dx \\ &\overset{p.I.}{=} \underbrace{\left[-\frac{n}{m^2}\cos(mx)\cdot\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{n^2}{m^2}\cos(mx)\cdot\cos(nx)\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n^2}{m^2}\cos(mx)\cdot\cos(nx)\, dx\end{aligned}$$

Wenn wir nun den ersten und den letzten Teil der obigen Gleichung auf dieselbe Seite bringen, so erhalten wir

$$\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cdot\cos(nx)\, dx = 0.$$

Falls aber $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \neq m$, so ist $\frac{n^2}{m^2} \neq 1$, also $\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) \neq 0$ und wenn wir die Gleichung dadurch teilen, so erhalten wir das gewünschte Resultat.

(b) Geht analog wie die letzte Aufgabe. Wir integrieren wieder zweimal partiell:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin(mx)}_{\text{integrieren}} \cdot \underbrace{\sin(nx)}_{\text{ableiten}}\, dx &\overset{p.I.}{=} \underbrace{\left[-\frac{1}{m}\cos(mx)\cdot\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{n}{m} \underbrace{\cos(mx)}_{\text{integrieren}} \cdot \underbrace{\cos(nx)}_{\text{ableiten}}\, dx \\ &\overset{p.I.}{=} \underbrace{\left[\frac{n}{m^2}\sin(mx)\cdot\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{n^2}{m^2}\sin(mx)\cdot\sin(nx)\, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n^2}{m^2}\sin(mx)\cdot\sin(nx)\, dx\end{aligned}$$

Wenn wir nun den ersten und den letzten Teil der obigen Gleichung auf dieselbe Seite bringen, so erhalten wir

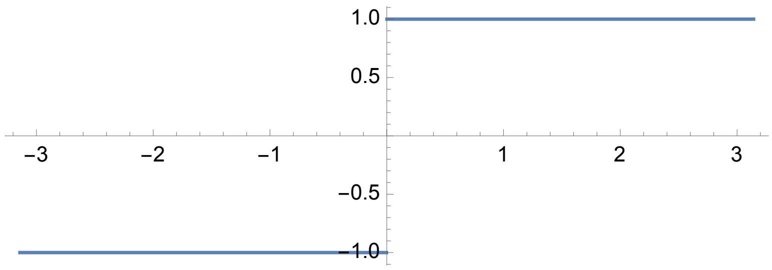
$$\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \cdot \sin(nx)\, dx = 0.$$

Falls aber $n, m \in \mathbb{N}$ und $n \neq m$, so ist $\frac{n^2}{m^2} \neq 1$, also $\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right) \neq 0$ und wenn wir die Gleichung dadurch teilen, so erhalten wir das gewünschte Resultat.

8. Berechnen Sie die Fourier-Reihe des Funktionsgraphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

im Intervall $[-\pi, \pi]$.



Lösung: Da die Funktion ungerade ist, sind alle $a_n = 0$. Wir brauchen also nur die b_n zu bestimmen:

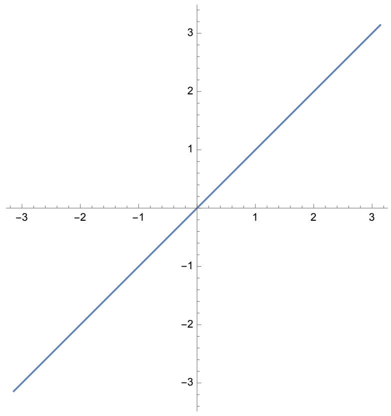
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -\sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx)\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi} \Big(\big(1 - (-1)^n\big) - \big((-1)^n - 1\big) \Big) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist die Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\,\pi} \sin\big((2n-1)\,x\big)$$

für $x \in [-\pi, \pi]$.

9. Berechnen Sie die Fourier-Reihe des Funktionsgraphen $y = x$ im Intervall $[-\pi, \pi]$.



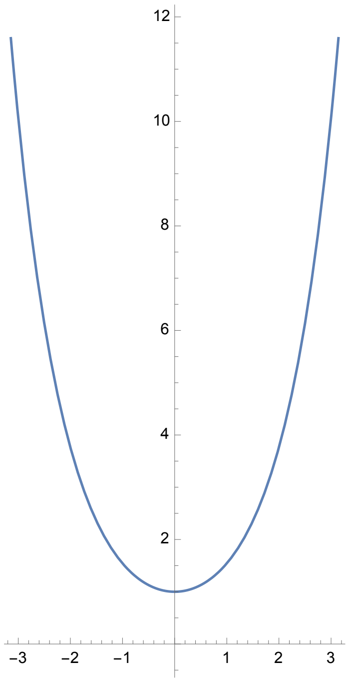
Lösung: Die Funktion ist ungerade und somit gilt wieder $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die b_n erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{x}_{\text{ableiten}} \underbrace{\sin(nx)}_{\text{integrieren}}\, dx \\
&\overset{p.I.}{=} \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n} \cos(nx)\, dx \\
&= -\frac{1}{n\pi} \Big((-1)^n \pi - (-1)^n (-\pi) \Big) + \frac{1}{n^2 \pi} \underbrace{[\sin(nx)]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} \\
&= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}
\end{aligned}
$$

Somit erhalten wir für $x \in [-\pi, \pi]$ die Fourier-Reihe

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx).
$$

10. Berechnen Sie die Fourier-Reihe des Funktionsgraphen $y = \cosh(x)$ im Intervall $[-\pi, \pi]$.



Lösung: Da $cosh$ eine gerade Funktion ist, muss $b_n = 0$ gelten für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die a_n bekommen wir:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cosh(x)}_{\text{integrieren}}\underbrace{\cos(nx)}_{\text{ableiten}}\,dx \\
&\overset{p.I.}{=} \frac{1}{\pi}\left[\sinh(x)\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -n\sinh(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\sinh(\pi)\,(-1)^n - \sinh(-\pi)\,(-1)^n\Big) + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sinh(x)}_{\text{integrieren}}\underbrace{\sin(nx)}_{\text{ableiten}}\,dx \\
&\overset{p.I.}{=} \frac{(-1)^n}{\pi}\big(\sinh(\pi) + \sinh(\pi)\big) + \frac{n}{\pi}\underbrace{\left[\cosh(x)\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{n\cosh(x)}_{\text{integrieren}}\underbrace{\cos(nx)}_{\text{ableiten}}\,dx
\end{aligned}$$

Anhand der obigen Gleichungen können wir somit auch schliessen, dass gilt

$$\frac{1+n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2\,(-1)^n}{\pi}\sinh(x).$$

Also gilt auch

$$a_n = \frac{2\,(-1)^n}{(n^2+1)\,\pi}\sinh(x).$$

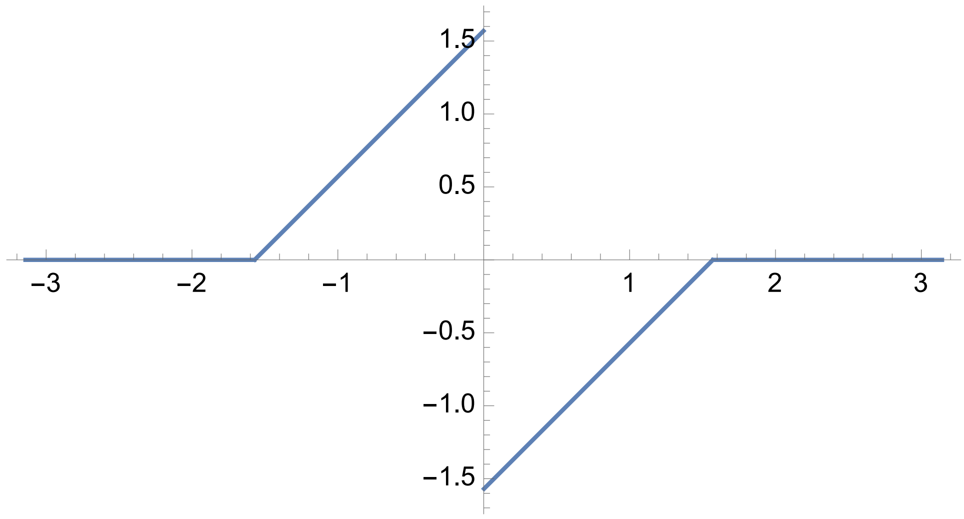
Somit erhalten wir für $x \in [-\pi, \pi]$ die Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = \frac{\sinh(x)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^n}{(n^2+1)\,\pi} \sinh(x) \cos(nx).$$

11. Berechnen Sie die Fourier-Reihe des Funktionsgraphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leqslant -\frac{\pi}{2} \text{ und für } x \geqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{\pi}{2} + x & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ -\frac{\pi}{2} + x & \text{für } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

im Intervall $[-\pi, \pi]$.



Lösung: Da $f(x)$ eine ungerade Funktion ist, verschwinden alle a_n. Deshalb reicht es, wenn wir nur die b_n berechnen:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) \sin(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\tfrac{\pi}{2} + x\right) \sin(nx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{ableiten} \underbrace{\sin(nx)}_{integrieren}\, dx - \frac{1}{2n} [\cos(nx)]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{1}{2n} [\cos(nx)]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&\overset{p.I.}{=} -\frac{1}{n\pi} [x\cos(nx)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos(nx)\, dx + \frac{1}{2n}\Big(-1 + \cos(-n\tfrac{\pi}{2}) + \cos(n\tfrac{\pi}{2}) - 1\Big) \\
&= -\frac{1}{2n}\Big(\cos(n\tfrac{\pi}{2}) + \cos(-n\tfrac{\pi}{2})\Big) + \frac{1}{n^2\pi} [\sin(nx)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n}\Big(-1 + \cos(n\tfrac{\pi}{2})\Big) \\
&= -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2\pi}\Big(\sin(n\tfrac{\pi}{2}) - \sin(-n\tfrac{\pi}{2})\Big) \\
&= -\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2\pi} \sin(n\tfrac{\pi}{2}))
\end{aligned}
$$

Beachte dabei, dass $\sin(n\frac{\pi}{2}) = 0$ für alle geraden n gilt. Die Fourier-Reihe der Funktion ist somit

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\,\pi} \sin((2n-1)\,x).
$$

für $x \in [-\pi, \pi]$.