Musterlösung Serie 3

VEKTORRÄUME, LINEARE ABBILDUNGEN, MATRIZEN

---

12. Seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$.

Zeigen Sie, dass dann folgendes gilt:

(a) Sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ linear abhängig, dann lässt sich *mindestens einer der Vektoren* $\vec{v}_j$ als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben, d.h. es existiert j mit $1 \leqslant j \leqslant k$, sodass gilt:

$$\vec{v}_j = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

(b) Sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ linear unabhängig, dann lässt sich *keiner der Vektoren* $\vec{v}_j$ als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben, d.h. für alle j mit $1 \leqslant j \leqslant k$ gilt:

$$\vec{v}_j \neq \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \lambda_i \cdot \vec{v}_i$$

(c) Ist $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$, dann ist

(i) $k = n$, und

(ii) jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ lässt sich *eindeutig* als Linearkombination $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \vec{v}_i$ schreiben.

Lösung:

(a) Wenn $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ linear abhängig sind, dann existieren per Definition $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_k \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^k \mu_i \cdot \vec{v}_i = 0$, wobei nicht alle μ_i verschwinden. Das heisst, es existiert ein $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ mit $\mu_j \neq 0$. Nun können wir die Vektorsumme umformen und erhalten

$$\mu_j \cdot \vec{v}_j = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} -\mu_i \cdot \vec{v}_i.$$

Da nun $\mu_j \neq 0$, können wir jede reelle Zahl durch μ_j teilen. Teilen wir also durch μ_j und definieren wir $\lambda_i = -\frac{\lambda_i}{\mu_j}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots k\} \backslash \{j\}$, so erhalten wir schliesslich wie gewünscht

$$\vec{v}_j = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \lambda_i \cdot \vec{v}_i.$$

(b) Falls die Aussage nicht stimmt, so gäbe es ein $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ mit

$$\vec{v}_j = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \lambda_i \cdot \vec{v}_i.$$

Sei nun $\lambda_j := -1$, dann gilt mit der oberen Gleichung auch

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0},$$

wobei nicht alle λ_i verschwinden. Dies ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$, also muss die Aussage stimmen.

(c) Um (c) zu lösen, verwenden und beweisen wir zuerst den folgenden Hilfssatz:
Sei $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ und $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ beliebig mit $\vec{u} = \sum_{i=1}^k \mu_i \cdot \vec{v}_i$, wobei $\mu_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant k$. Falls nun $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ existiert mit $\mu_j \neq 0$, dann ist $\{\vec{u}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \backslash \{\vec{v}_j\}$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^n$.
Wir müssen nun zeigen, dass der Hilfssatz wahr ist, also dass die neue Basis auch tatsächlich eine Basis ist von $\mathbb{R}^n$:

- Wir zeigen zuerst, dass die Vektoren in $\{\vec{u}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \backslash \{\vec{v}_j\}$ linear unabhängig sind: Seien dazu $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ beliebig mit

$$\lambda_j \vec{u} + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \vec{0}.$$

  Falls nun $\lambda_j \neq 0$, dann könnten wir $\vec{u} = \sum_{i=1}^k \mu_i \cdot \vec{v}_i$ ersetzten und erhalten

$$\lambda_j \mu_j \cdot \vec{v}_j + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} (\lambda_j \mu_i + \lambda_i) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}.$$

  Nun ist nach Annahme $\lambda_j \mu_j \neq 0$, also wäre dies ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Es ist also $\lambda_j = 0$ und somit auch $\lambda_i = 0$ für $1 \leqslant i \leqslant k$, da die Vektoren in $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ linear unabhängig sind. Wir haben also gezeigt, dass $\{\vec{u}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \backslash \{\vec{v}_j\}$ ebenfalls eine Menge von linear unabhängigen Vektoren ist.
- Es bleibt zu zeigen, dass man jeden Vektor des $\mathbb{R}^n$ durch eine Linearkombination von Elementen der Menge $\{\vec{u}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \backslash \{\vec{v}_j\}$ erzeugen kann. Sei nun $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Da $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ ist, finden wir $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ mit $\vec{w} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \vec{v}_i$. Da $\mu_j \neq 0$, können wir $\vec{v}_j$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_i$ und $\vec{u}$ ausdrücken. Wir erhalten

$$\vec{w} = \lambda_j \left(\vec{u} - \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \frac{\mu_i}{\mu_j} \cdot \vec{v}_i \right) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \lambda_j \cdot \vec{u} + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ i \neq j}} \left(\lambda_i - \frac{\mu_i}{\mu_j} \right) \cdot \vec{v}_i$$

  und sehen, dass $\vec{w}$ durch eine Linearkombination von Vektoren aus $\{\vec{u}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} \backslash \{\vec{v}_j\}$ erzeugt ist. Da $\vec{w}$ beliebig war, folgt die Aussage.

Damit können wir nun die folgenden Aufgaben lösen:

(i) Offensichtlich ist die Menge der Einheitsvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ eine Basis, denn die Einheitsvektoren lassen sich nicht durch eine Linearkombination der anderen Einheitsvektoren erzeugen, aber jeder Vektor des $\mathbb{R}^n$ lässt sich als Linearkombination der Einheitsvektoren darstellen. Wir zeigen, dass sowohl $k < n$ als auch $k > n$ zu einem Widerspruch führen:

- Sei $k < n$. Das Ziel ist nun, eine Basis von $\mathbb{R}^n$ zu konstruieren, die aus allen Vektoren $\vec{v}_i$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ und mindestens einem Einheitsvektoren besteht. Beachte auch, dass die Vektoren in $\{\vec{u}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ alle vom Nullvektor verschieden sind. Denn der Nullvektor macht jede Menge von Vektoren linear abhängig. Wir beginnen nun mit $\vec{v}_1$. Nun lässt sich dieser Vektor durch Einheitsvektoren linear kombinieren, wobei nicht alle Koeffizienten der Basisvektoren für $\vec{v}_1$ verschwinden. Es gibt also $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sodass der Koeffizient von e_j für die Linearkombination von $\vec{v}_1$ nicht verschwindet. Nach dem Hilfssatz ist somit $\{\vec{v}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_n\} \backslash \{\vec{e}_j\}$ ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Und deshalb gibt es auch eine Linearkombination aus Vektoren von $\{\vec{v}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \ldots, \vec{e}_n\} \backslash \{\vec{e}_j\}$, die dem Vektor $\vec{v}_2$ darstellt, wobei nicht alle Koeffizienten vor den verbleibenden Einheitsvektoren Null sein können (sonst wären $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ linear abhängig). Wir können also den Vektoren $\vec{v}_2$ ebenfalls durch einen Einheitsvektoren austauschen, sodass die resultierende Menge immer noch linear abhängig bleibt. Führt man diesen Schritt insgesamt k-mal durch, so erhalten wir die gewünschte Basis.
- Sei $k > n$, dann kann man analog auch zeigen, dass man alle n Einheitsvektoren mit Vektoren der Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ austauschen kann, so dass eine Basis von $\mathbb{R}^n$ entsteht, die aus allen Eintheitsvektoren sowie mindestens einem weiteren Vektoren v_j mit $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ besteht.

Der Widerspruch folgt nun aus der nächsten Teilaufgabe, da bei den beiden oben konstruierten Basen entweder Basis $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ oder alle Einheitsvektoren enthält. Somit sind die weiteren darin enthaltenen Vektoren als Linearkombination von denen darstellbar und dies ist ein Widerspruch zu Aufgabe (a). Es muss also $k = n$ gelten.

(ii) Sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ beliebig und seien $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ für $1 \leqslant i \leqslant k$ mit

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{v}_i = \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \cdot \vec{v}_i.$$

Dann ist auch

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ folgt nun $\lambda_i - \mu_i = 0$, also $\lambda_i = \mu_i$ für alle $1 \leqslant i \leqslant k$ und dies bedeutet, dass es eine eindeutige Linearkombination von Vektoren aus $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ für $\vec{v}$ gibt.

Bemerkung: Aus (c) folgt, dass jede Menge M bestehend aus n linear unabhängigen Vektoren von $\mathbb{R}^n$ bereits eine Basis ist. Denn falls nicht, so können wir wie folgt vorgehen: Wir betrachten den ersten Einheitsvektor $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^n$. Falls dieser nicht durch die Vektoren in M erzeugbar ist, so definiere $M_1 := M \cup \{e_1\}$ (bemerke, dass M_1 linear unabhängig ist nach (a) und (b)). Ansonsten setze $M_1 := M$. Wir können nun iterativ so vorgehen. Sei dazu $1 < i < k$ und M_i die bereits konstruierte linear unabhängige Menge. Falls $M_i \cup \vec{e}_{i+1}$ linear unabhängig ist, so setze $M_{i+1} := M_i \cup \vec{e}_{i+1}$ und sonst $M_{i+1} := M_i$. Nach n vielen Schritten erhalten wir schliesslich die linear unabhängige Menge M_n. Nun kann jeder Vektor in $\mathbb{R}^n$ durch Vektoren in M_n erzeugt werden, denn M_n erzeugt die Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^n$ und somit auch den ganzen $\mathbb{R}^n$. Das heisst, M_n ist eine Basis und hat somit die Kardinalität $|M_n| = n = |M|$. Also wurden zur Menge M gar keine Basisvektoren hinzugefügt und somit muss jeder Basisvektor und damit auch jeder Vektor in $\mathbb{R}^n$ durch eine Linearkombination von Vektoren aus M erzeugbar sein.

13. Seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_6 \in \mathbb{R}^4$ die folgenden Vektoren:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Mengen bilden eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^4$?

(a) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5, \vec{v}_6\}$

(b) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$

(c) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$

(d) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5, \vec{v}_6\}$

(e) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5, \vec{v}_6\}$

(f) $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_6\}$

Lösung:

(a) Die Dimension von $\mathbb{R}^4$ ist 4, da die 4 Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^4$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Nach Aufgabe 12. (c) (i) kann also eine Menge von Vektoren mit mehr oder weniger als 4 Elemente keine Basis von $\mathbb{R}^4$ sein.

(b) Mit demselben Argument wie bei der letzten Teilaufgabe folgt, dass $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5\}$ keine Basis von $\mathbb{R}^4$ sein kann, da diese Menge nur 3 Elemente enthält, aber jede Basis von $\mathbb{R}^4$ aus genau 4 Elementen bestehen muss.

(c) Nach der Bemerkung am Ende von Aufgabe 12 wissen wir, dass im $\mathbb{R}^4$ 4 linear unabhängige Vektoren bereits eine Basis sind. Es reicht also, wenn wir die Vekoren nur auf lineare Unabhängigkeit überprüfen. Seien dazu $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 4, 5$ und sei

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_4 \cdot \vec{v}_4 + \lambda_5 \cdot \vec{v}_5 = \vec{0}.$$

Dies ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 3\lambda_2 + 4\lambda_4 - \lambda_5 &= 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_4 - \lambda_5 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_4 + \lambda_5 &= 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_4 + \lambda_5 &= 0. \end{aligned}$$

Addieren wir die erste Zeile zur zweiten und vierten Zeile sowie zum -1-fachen der dritten Zeile, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 3\lambda_2 + 4\lambda_4 - \lambda_5 &= 0 \\ 6\lambda_4 - 2\lambda_5 &= 0 \\ -6\lambda_2 + 8\lambda_4 - 2\lambda_5 &= 0 \\ -6\lambda_2 + 2\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die zweite und die vierte Zeile linear abhängig sind. Das heisst, wir finden eine Lösung für dieses Gleichungssystem, ohne dass alle λ_i gleich Null sein müssen. Einfach sehen könenn wir dies, wenn wir die zweite mit der dritten Zeile vertauschen und überall die λ_5 auf die rechte Seite bringen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 3\lambda_2 + 4\lambda_4 &= \lambda_5 \\ -6\lambda_2 + 8\lambda_4 &= 2\lambda_5 \\ 6\lambda_4 &= 2\lambda_5. \end{aligned}$$

Nun sieht man schnell, dass wir für λ_5 eine beliebige Zahl wählen können und daraus können wir dann sukzessive die anderen λ_i berechnen. Zum Beispiel folgt aus $\lambda_5 = 3$, dass $\lambda_4 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ und $\lambda_1 = 0$. Somit sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ linear abhängig und bilden deshalb auch keine Basis des $\mathbb{R}^4$.

(d) Wir schauen, ob die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5, \vec{v}_6$ linear unabhängig sind. Seinen dazu $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 5, 6$ mit

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_5 \cdot \vec{v}_5 + \lambda_6 \cdot \vec{v}_6 = \vec{0}.$$

Daraus erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_6 &= 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_5 - 2\lambda_6 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_5 - 2\lambda_6 &= 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6 &= 0. \end{aligned}$$

Wieder addieren wir die erste mit der zweiten und der vierten Zeile sowie mit dem -1-fachen der dritten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_6 &= 0 \\ -2\lambda_5 - \lambda_6 &= 0 \\ -6\lambda_2 - 2\lambda_5 + 3\lambda_6 &= 0 \\ -6\lambda_2 + 2\lambda_6 &= 0. \end{aligned}$$

Addieren wir das -3-fache der zweiten Zeile zur vierten Zeile und vertauschen wir die beiden mittleren Zeilen, so bekommen wir

$$\begin{aligned}\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_6 &= 0\\ -6\lambda_2 - 2\lambda_5 + 3\lambda_6 &= 0\\ -2\lambda_5 - \lambda_6 &= 0\\ 5\lambda_6 &= 0.\end{aligned}$$

Wir sehen, dass $\lambda_6 = 0$ gelten muss und daraus folgt auch, dass $\lambda_i = 0$ ist für $i = 1, 2, 5$. Somit sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_5, \vec{v}_6$ linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

(e) Wieder überprüfen wir, ob die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5, \vec{v}_6$ linear unabhängig sind, indem wir annehmen

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_3 \cdot \vec{v}_3 + \lambda_5 \cdot \vec{v}_5 + \lambda_6 \cdot \vec{v}_6 = \vec{0}$$

für $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $i = 1, 3, 5, 6$. Wir erhalten die Gleichung

$$\begin{aligned}\lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_6 &= 0\\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_5 - 2\lambda_6 &= 0\\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_5 - 2\lambda_6 &= 0\\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_5 + \lambda_6 &= 0.\end{aligned}$$

Addieren wir wieder die erste Zeile zur zweiten und vierten sowie zur -1-fachen der dritten Zeile, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_6 &= 0\\ -2\lambda_5 - \lambda_6 &= 0\\ -6\lambda_2 - 2\lambda_5 + 3\lambda_6 &= 0\\ -6\lambda_2 + 2\lambda_6 &= 0.\end{aligned}$$

Wir können nun das -1-fache der dritten Zeile zur vierten addieren und die beiden mittleren Zeilen vertauschen. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_6 &= 0\\ -6\lambda_2 - 2\lambda_5 + 3\lambda_6 &= 0\\ -2\lambda_5 - \lambda_6 &= 0\\ 2\lambda_5 - \lambda_6 &= 0.\end{aligned}$$

Nun können wir die dritte zur vierten Zeile addieren und die letzte Gleichung wäre offenbar nur lösbar, wenn $\lambda_6 = 0$ gilt. Daraus lässt sich durch (Rückwärts-)Auflösen der Gleichungen schliessen, dass alle $\lambda_i = 0$ sein müssten für $i = 1, 3, 5$. Wir erhalten, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_5, \vec{v}_6$ linear unabhängig sind und somit bilden sie auch eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

(f) Wir kontrollieren die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_6$, auf lineare Unabhängigkeit. Dazu seien $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3, 6$ mit

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{v}_3 + \lambda_6 \cdot \vec{v}_6 = \vec{0}.$$

Wir erhalten daraus das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\lambda_1 - 3\lambda_2 - 4\lambda_3 + \lambda_6 &= 0 \\
-\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 - 2\lambda_6 &= 0 \\
\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 - 2\lambda_6 &= 0 \\
-\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_6 &= 0.
\end{aligned}$$

Wir gehen analog vor wie bei den vorherigen Aufgaben, indem wir die erste Zeile zur zweiten und vierten und ihr -1-faches zur dritten Zeile addieren. Wir erhalten dann das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\lambda_1 - 3\lambda_2 - 4\lambda_3 + \lambda_6 &= 0 \\
-\lambda_6 &= 0 \\
6\lambda_2 + 6\lambda_3 - 3\lambda_6 &= 0 \\
-6\lambda_2 - 6\lambda_3 + 2\lambda_6 &= 0.
\end{aligned}$$

Da nach der zweiten Zeile $\lambda_6 = 0$ ist, sehen wir sofort, dass die beiden letzten Zeilen je das -1-fache voneinander sind. Wir können nun die erste und dritte Zeile nach λ_3 auflösen und erhalten:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 4\lambda_3 \\
6\lambda_2 &= -6\lambda_3
\end{aligned}$$

Beispielsweise löst dann $\lambda_6 = 0$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_1 = 1$ das Gleichungssystem und wir sehen, dass die vier Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_6$, linear abhängig sind und somit keine Basis des $\mathbb{R}^4$ sein können.

14. Entscheiden Sie für die folgenden Abbildungen, ob es sich um lineare Abbildungen handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls die Matrix, welche die entsprechende lineare Abbildung darstellt.

(a)
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^1 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+1 \\ -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} y-3z \\ z-y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x+2y+3z \\ x+z \\ 2x-2y+3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass es sich hierbei um eine lineare Abbildung handelt, indem wir die beiden Punkte der Definition nachweisen. Seinen dazu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (x_1+x_2) - 2(y_1+y_2) \\ 0 \\ -(x_1+x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1-2y_1) + (x_2-2y_2) \\ 0 \\ -x_1-x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1-2y_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2-2y_2 \\ 0 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ &= f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Sei nun $a \in \mathbb{R}$, dann erhalten wir auch

$$\begin{aligned} f\left(a\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix}ax_1\\ay_1\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}ax_1-2ay_1\\0\\-ax_1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}a\left(x_1-2y_1\right)\\a\cdot 0\\a\left(-x_1\right)\end{pmatrix}\\ &= a\begin{pmatrix}x_1-2y_1\\0\\-x_1\end{pmatrix}\\ &= af\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Da $x_1, y_1, x_2, y_2, a \in \mathbb{R}$ beliebig waren, können wir schliessen, dass f eine lineare Abbildung ist. Nun stellt die Matrix

$$\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\-1&0\end{pmatrix}$$

die lineare Abbildung f dar, denn es gilt

$$\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-2y_1\\0\\-x_1\end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\right).$$

(b) Es ist

$$f\left(\left(0\right)\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

also ist f keine lineare Abbildung, da lineare Abbildungen den Nullvektor auf den Nullvektor abbilden. Da sich nur lineare Abbildungen durch Matrizen beschreiben lassen, gibt es folglich keine Matrix, welche die Abbildung f darstellt.

(c) Es ist auch möglich die beiden Bedingungen, Additivität und Multiplikativität von Abbildungen, zusammen zu überprüfen: Seinen dazu $a, b, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned}
f\left(a\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}ax_1\\ay_1\\az_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}bx_2\\by_2\\bz_2\end{pmatrix}\right)
&= f\left(\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\ay_1+by_2\\az_1+bz_2\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}(ay_1+by_2)-3(az_1+bz_2)\\(az_1+bz_2)-(ay_1+by_2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(ay_1-3az_1)+(by_2-3bz_2)\\(az_1-ay_1)+(bz_2-by_2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a(y_1-3z_1)+b(y_2-3z_2)\\a(z_1-y_1)+b(z_2-y_2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a(y_1-3z_1)\\a(z_1-y_1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b(y_2-3z_2)\\b(z_2-y_2)\end{pmatrix}\\
&= a\begin{pmatrix}y_1-3z_1\\z_1-y_1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}y_2-3z_2\\z_2-y_2\end{pmatrix}\\
&= af\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\right)+bf\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Somit ist f eine lineare Abbildung. Offenbar ist

$$\begin{pmatrix}0&1&-3\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

die Matrix der zugehörigen lineare Abbildung f, da

$$\begin{pmatrix}0&1&-3\\0&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1-3z_1\\z_1-y_1\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\right).$$

(d) Wir gehen analog vor wie in der letzten Aufgabe. Seinen dazu wieder

$a, b, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
f\left(a\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix}ax_1\\ay_1\\az_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}bx_2\\by_2\\bz_2\end{pmatrix}\right)\\
&= f\left(\begin{pmatrix}ax_1+bx_2\\ay_1+by_2\\az_1+bz_2\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}(ax_1+bx_2)+2(ay_1+by_2)+3(az_1+bz_2)\\(ax_1+bx_2)+(az_1+bz_2)\\2(ax_1+bx_2)-2(ay_1+by_2)+3(az_1+bz_2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}(ax_1+2ay_1+3az_1)+(bx_2+2by_2+3bz_2)\\(ax_1+az_1)+(bx_2+bz_2)\\(2ax_1-2ay_1+3az_1)+(2bx_2-2by_2+3bz_2)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}ax_1+2ay_1+3az_1\\ax_1+az_1\\2ax_1-2ay_1+3az_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}bx_2+2by_2+3bz_2\\bx_2+bz_2\\2bx_2-2by_2+3bz_2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a(x_1+2y_1+3z_1)\\a(x_1+z_1)\\a(2x_1-2y_1+3z_1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b(x_2+2y_2+3z_2)\\b(x_2+z_2)\\b(2x_2-2y_2+3z_2)\end{pmatrix}\\
&= a\begin{pmatrix}x_1+2y_1+3z_1\\x_1+z_1\\2x_1-2y_1+3z_1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}x_2+2y_2+3z_2\\x_2+z_2\\2x_2-2y_2+3z_2\end{pmatrix}\\
&= af\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\right)+bf\left(\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\right),
\end{aligned}
$$

also ist f eine lineare Abbildung. Da ausserdem

$$
\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+2y_1+3z_1\\x_1+z_1\\2x_1-2y_1+3z_1\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\right).
$$

gilt, stellt

$$
\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&-2&3\end{pmatrix}
$$

die lineare Abbildung f dar.

15. Berechnen Sie die Matrix A:

$$
A=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}6&6&-2&-2\\2&-6&2&6\\1&2&1&2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1&2\\2&3\\3&4\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-2\\-2&3\\3&-4\\-4&-3\end{pmatrix}\right)
$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}6 & 6 & -2 & -2\\ 2 & -6 & 2 & 6\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\\ 3 & -4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}6 & 6 & -2 & -2\\ 2 & -6 & 2 & 6\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+1 & 2-2\\ 2-2 & 3+3\\ 3+3 & 4-4\\ 4-4 & 5-3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}6 & 6 & -2 & -2\\ 2 & -6 & 2 & 6\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 6\\ 6 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}6\cdot 2+6\cdot 0-2\cdot 6-2\cdot 0 & 6\cdot 0+6\cdot 6-2\cdot 0-2\cdot 2\\ 2\cdot 2-6\cdot 0+2\cdot 6+6\cdot 0 & 2\cdot 0-6\cdot 6+2\cdot 0+6\cdot 2\\ 1\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot 6+2\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 6+1\cdot 0+2\cdot 2\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}0 & 32\\ 16 & -24\\ 8 & 16\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & 4\\ 2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

16. Entscheiden Sie, ob die folgende Matrix A eine Inverse hat.

$$
A = \begin{pmatrix}1 & -2 & 6\\ -2 & -2 & 0\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}
$$

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass die Spaltenvektoren der Matrix A linear abhängig sind. Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$
\lambda_1\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 5\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-2\\ -2\\ 3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}
$$

Daraus erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 - 2\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0\\
-2\lambda_1 - 2\lambda_2 &= 0\\
5\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Addieren wir nun das 2-fache und das -5-fache der ersten Gleichung zur zweiten beziehungsweise letzten Gleichung, so erhalten wir schliesslich

$$\begin{aligned} \lambda_1 - 2\lambda_2 + 6\lambda_3 &= 0 \\ -6\lambda_2 + 12\lambda_3 &= 0 \\ 13\lambda_2 - 26\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Beachte, dass die letzte Zeile wegfällt, wenn wir das -13-fache dieser mit der 6-fachen der letzten Zeile addieren. Das heisst, es gibt somit auch nichttriviale $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, sodass eine Linearkombination der Spaltenvektoren von A den Nullvektor ergibt (zum Beispiel $\lambda_1 = -2, \lambda_1 = 2, \lambda_1 = 1$). Sei nun also $\vec{v} \neq \vec{0}$ ein solcher Vektor mit der Eigenschaft $A\vec{v} = \vec{0}$. Falls eine Inverse B zu A existieren würde, würde daraus folgen

$$\vec{v} = I\vec{v} = BA\vec{v} = B\vec{0} = \vec{0}$$

und dies ist ein Wiederspruch zur Annahme, dass $\vec{v}$ nicht der Nullvektor ist. Folglich kann zu A keine Inverse B existieren.

Bemerkung: Dasselbe Resultat wie oben könnten wir mit jeder Matrix mit abhängignen Spaltenvektoren erreichen. Folglich impliziert die Existenz einer Inversen von einer Matrix, dass ihre Spaltenvektoren linear unabhängig sind, repektive dass eine Matrix mit linear abhängigen Spaltenvektoren nie eine Inverse haben kann. Tatsächlich gilt hierzu auch die Umkehrung. Das heisst, eine (quadratische) Matrix hat genau dann linear unabhängige Spaltenvektoren, wenn sie invertiererbar ist.