D-HEST (Humanmedizin) — Mathematik II — FS 2023

Prof. Dr. Lorenz Halbeisen

Musterlösung Serie 5

VEKTORFELDER UND LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME

---

20. Ordnen Sie die folgenden vier Funktionen den vier Vektorfeldern zu:

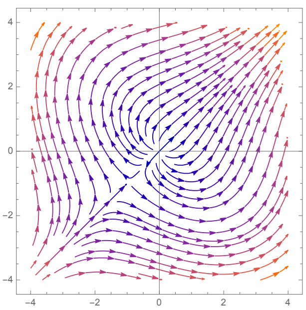
(a) $f\big((x,y)\big) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$

(b) $f\big((x,y)\big) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x^2 - y \end{pmatrix}$

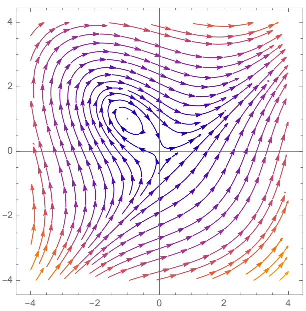
(c) $f\big((x,y)\big) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ x^2 + y \end{pmatrix}$

(d) $f\big((x,y)\big) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \cos(y^2) \end{pmatrix}$

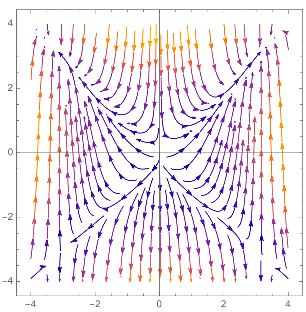
(A)



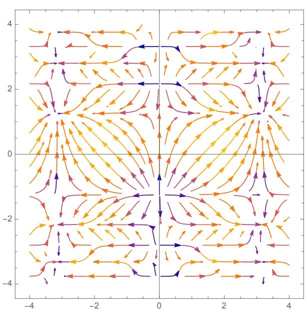
(C)



(B)



(D)



Lösung: Bei solchen Aufgaben gibt es sehr viele verschiedene Wege, wie man Bild und Funktion den Vektorfelder zuordnen kann. Beispielsweise kann man wie folgt vorgehen:

(a) Die x-Komponente von dieser Funktion verschwindet bei den Pfeilen genau dann, wenn x einem ganzzahligen Vielfachen von π entspricht. Insbesondere kann es auf der Achse $x = 0$ von dieser Funktion nur Pfeile geben, die nicht nach oben zeigen (da $-y^2$ niemals grösser als 0 ist). Dies wird nur von (B) erfüllt.

(b) Bei dieser Funktion verschwindet die x-Komponente der Pfeile auf der Parabel $-x = y^2$ und die y-Komponente auf der Parabel $y = x^2$. Insbesondere verschwinden beim Punkt $(0,0)$ und $(-1,1)$ beide Komponenten. Durch Einsetzten sieht man, dass die Pfeile beim Punkt $(-1,1)$ nur genau bei der Funktion bei (b) in beiden Komponenten verschwindet. Dies sieht man bei (C) sehr schön.

(c) Bei dieser Funktion verschwindet ebenfalls die x-Komponente der Pfeile auf der Parabel $-x = y^2$ und die y- Komponente auf der Parabel $-y = x^2$. Somit ist der einzige Punkt, in dem beide Komponenten der Pfeile verschwinden, der Punkt $(0,0)$. Wir können also (D) ausschliessen. Hingegen erfüllt (A) die bisherigen Kriterien. Auch kommt hinzu, dass die Funktion bei (c) die einzige ist, bei welcher im ersten Quadranten beide Komponenten der Pfeile nicht-negativ sind. Dies wird nur von (A) erfüllt.

(d) Die letzte Funktion ist wohl die komplizierteste. Ein Unterschied zu den anderen Funktionen besteht wohl darin, dass der Pfeil bei $(0,0)$ in y-Richtung zeigen muss und nicht verschwindet. Deshalb kann nur Bild (D) dazu passen.

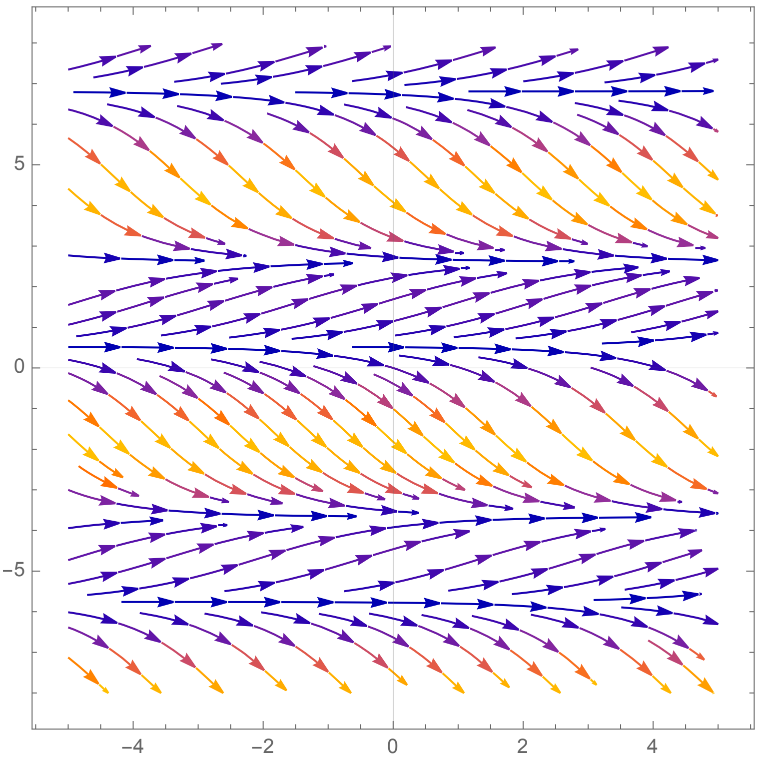
21. (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld welches zu folgender autonomen Differentialgleichung gehört:

$$y' = \sin(y) - \frac{1}{2}$$

(b) Bestimmen Sie alle Gleichwichtslösungen dieser Differentialgleichung.

Lösung:

(a) Das Vektorfeld dieser Differentialgleichung sieht so aus:



(b) Für die Gleichgewichtslösung muss gelten $y' = 0$, was äquivalent ist zu $\sin(y) = \frac{1}{2}$. Die Lösungen sind $y = \frac{1}{6}\pi$ sowie $y = \frac{5}{6}\pi$ für $y \in [0, 2\pi]$. Da der Sinus 2π-periodisch ist, gilt somit allgemein, dass $y = (\frac{1}{6} + 2k) \cdot \pi$ sowie $y = (\frac{5}{6} + 2k) \cdot \pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ beliebig, Gleichgewichtslösungen sind.

22. Berechnen Sie jeweils die Lösung der folgenden Differentialgleichungssysteme für die gilt $x(0) = y(0) = 1$.

(a) $$\begin{array}{rcrcl} 8\,x(t) & - & y(t) & = & \dot{x}(t) \\ -\,2\,x(t) & + & 7\,y(t) & = & \dot{y}(t) \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcl} 4\,x(t) & - & 2\,y(t) & = & \dot{x}(t) \\ -\,4x(t) & + & 2\,y(t) & = & \dot{y}(t) \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcl} x(t) & + & 4\,y(t) & = & \dot{x}(t) \\ -\,x(t) & + & y(t) & = & \dot{y}(t) \end{array}$$

Hinweis: Vergleiche mit Aufgabe 19: Die Eigenwerte und ihre zugehörigen Eigenvektoren der gegebenen Matrizen sind:

(a) $\lambda_1 = 6$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = 9$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\lambda_1 = 0$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = 6$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$ und $\lambda_2 = 1 - 2i$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Anhand der Eigenwerte und Eigenvektoren bekommen wir die homogene Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{6t} + C_2 e^{9t} \\ y(t) &= 2C_1 e^{6t} - C_2 e^{9t}, \end{aligned}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Setze wir nun die Anfangswerte $x(0) = y(0) = 1$ ein, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= 2C_1 - C_2. \end{aligned}$$

Addieren wir die beiden Gleichungen und teilen wir die neu erhaltene Gleichung auf beiden Seiten durch 3, so erhalten wir schliesslich $C_1 = \frac{2}{3}$ und $C_2 = \frac{1}{3}$. Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung ist also

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{2}{3} e^{6t} + \tfrac{1}{3} e^{9t} \\ y(t) &= \tfrac{4}{3} e^{6t} - \tfrac{1}{3} e^{9t}. \end{aligned}$$

(b) Wieder können wir die homogene Lösung anhand der Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 + C_2 e^{6t} \\ y(t) &= 2C_1 - C_2 e^{6t}, \end{aligned}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Setze wir nun die Anfangswerte $x(0) = y(0) = 1$ ein, so erhalten wir dasselbe Gleichungssystem wie vorher:

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= 2C_1 - C_2 \end{aligned}$$

Die Lösungen davon sind $C_1 = \frac{2}{3}$ und $C_2 = \frac{1}{3}$. Somit bekommen wir als allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} e^{6t} \\ y(t) &= \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3} e^{6t}. \end{aligned}$$

(c) Anhand der Eigenwerte und Eigenvektoren bekommen wir die homogene Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= 2c_1 e^{(1+2i)t} + 2c_2 e^{(1-2i)t} \\ y(t) &= ic_1 e^{(1+2i)t} - ic_2 e^{(1-2i)t}, \end{aligned}$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ sein können. Wir sind aber nur an den reellen Lösungen der Differentialgleichung interessiert. Beachte, dass $e^{2it} = \cos(2t) + i\sin(2t)$ ist. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\left(c_1 + c_2\right)\cos(2t)e^t + 2i\left(c_1 - c_2\right)\sin(2t)e^t \\ y(t) &= -\left(c_1 + c_2\right)\sin(2t)e^t + i\left(c_1 - c_2\right)\cos(2t)e^t. \end{aligned}$$

Wir können nun die Konstanten $C_1 := c_1 + c_2$ sowie $C_2 := i\left(c_1 - c_2\right)$ wählen und erhalten

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(2C_1\cos(2t) + 2C_2\sin(2t)\right)e^t \\ y(t) &= \left(-C_1\sin(2t) + C_2\cos(2t)\right)e^t. \end{aligned}$$

Falls $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sind, dann wird die homogene Lösung rein reell sein. Setzten wir nun die Anfangswerte $x(0) = y(0) = 1$ ein, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} 1 &= 2C_1 \\ 1 &= C_2 \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$\begin{aligned} x(t) &= (\cos(2t) + 2\sin(2t))\, e^t \\ y(t) &= \left(-\tfrac{1}{2}\sin(2t) + \cos(2t)\right) e^t. \end{aligned}$$