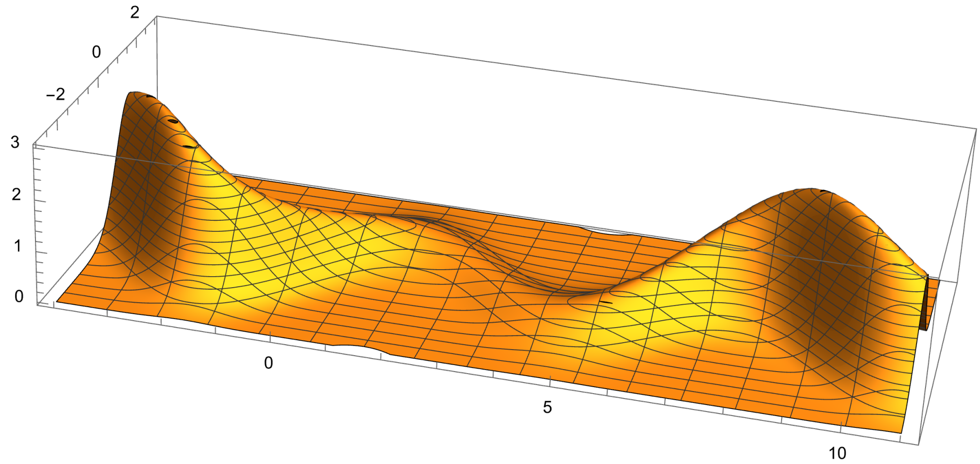
Musterlösung Serie 6

DIFFERENTIALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

Im Folgenden sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x,y) = e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}$$

welche die Fläche $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y) = z\right\}$ in $\mathbb{R}^3$ definiert.



23. Bestimmen Sie die Schnittkurven der Fläche F mit den folgenden Ebenen:

(a) $x = 0$ (b) $x = \pi$ (c) $y = 0$

Lösung: Die gesuchten Schnittkurven s_i für $i = 1,2,3$ werden je durch einen freien Parameter beschrieben. Zuerst bestimmen wir die Höhe einer Kurve in Abhängigkeit des freien und des gegebenen Parameters. Anschliessend können wir die betrachtete Kurve parametrisieren:

(a)

$$\begin{aligned} f(0,y) &= e^{-((\sin(0)-y)^2+\sin(\frac{0}{2}))} \\ &= e^{-y^2} \end{aligned}$$

Somit ist die Schnittkurve $s_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$s_1(t) = \left(0, t, e^{-t^2}\right)^T.$$

(b)

$$\begin{aligned} f(\pi,y) &= e^{-((\sin(\pi)-y)^2+\sin(\frac{\pi}{2}))} \\ &= e^{-(y^2+1)} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Schnittkurve $s_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

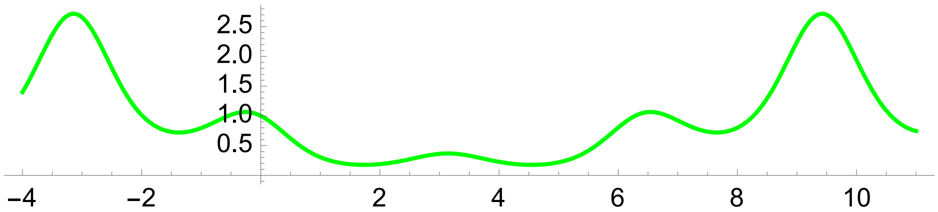
$$s_2(t) = \left(\pi, t, e^{-(t^2+1)}\right)^T.$$

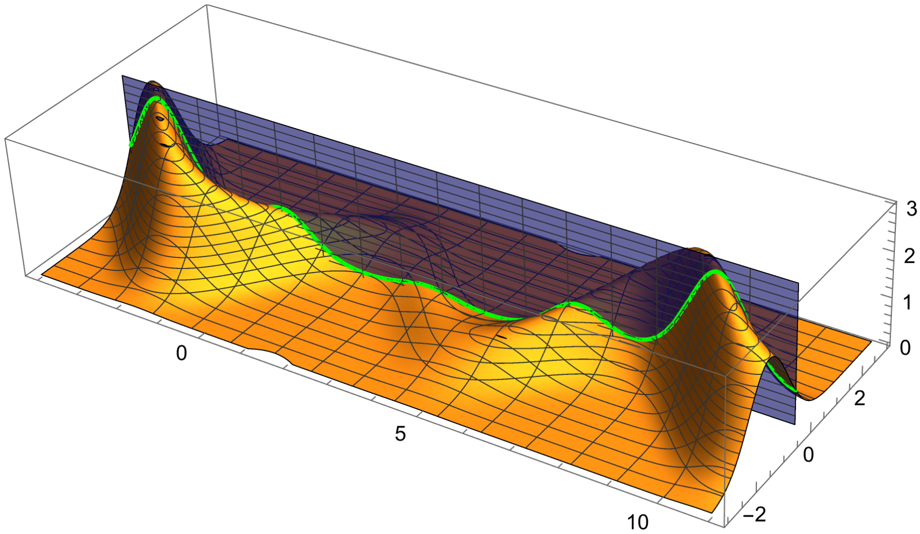
(c)

$$\begin{aligned} f(x,0) &= e^{-((\sin(x)-0)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\ &= e^{-(\sin(x)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \end{aligned}$$

Wir bekommen die Schnittkurve $s_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$s_3(t) = \left(t, 0, e^{-(\sin(t)^2+\sin(\frac{t}{2}))}\right)^T.$$





24. Bestimmen Sie die Funktionen der beiden Höhenkurven auf der Höhe $z = \frac{1}{e}$.

Lösung: Setzten wir $f(x,y) = \frac{1}{e} = z$, so erhalten wir

$$e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} = \frac{1}{e} = e^{-1}.$$

Logarithmieren wir zur Basis e auf beiden Seiten, dann bekommen wir

$$-((\sin(x)-y)^2+\sin(\tfrac{x}{2})) = -1.$$

Wir können nun die implizite Gleichung als Polynomgleichung zweiten Grades in y interpretieren:

$$y^2 - 2\sin(x)y + \sin(x)^2 + \sin(\tfrac{x}{2}) - 1 = 0$$

Anhand der Mitternachtsformel lässt sich diese nach y auflösen

$$y = \frac{2\sin(x) \pm \sqrt{4\sin(x)^2 - 4\left(\sin(x)^2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)}}{2}$$

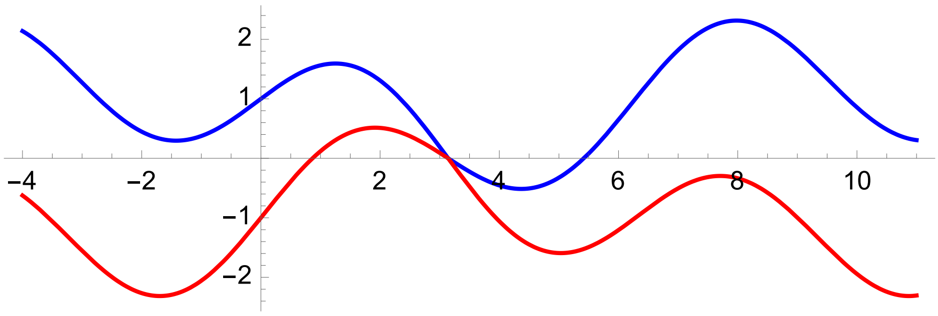
$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\sin(x) \pm \sqrt{4 - 4\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}{2} \\
&= \sin(x) \pm \sqrt{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

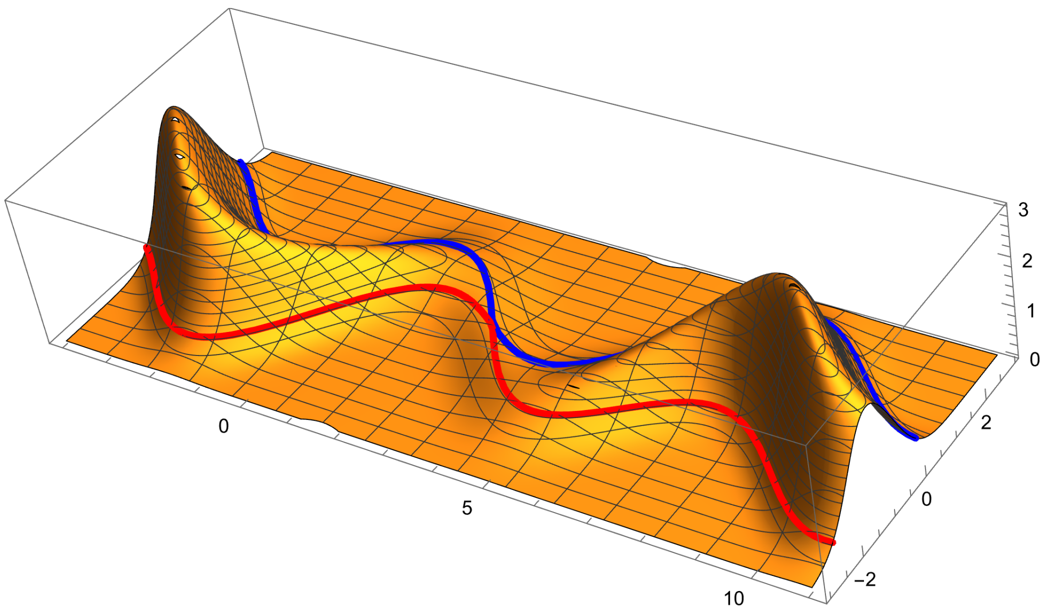
Da der Sinus nur Werte zwischen 1 und -1 annimmt, ist der Wurzelterm unabhängig von der Wahl von x immer definiert. Des Weiteren ist zu beachten, dass wir zwei Höhenkurven $h_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ und $h_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ haben, da das Vorzeichen der Wurzel positiv oder negativ sein kann. Diese sind gegeben durch

$$h_+(t) = \left(t, \sin(t) + \sqrt{1 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \frac{1}{e}\right)^T$$

und

$$h_-(t) = \left(t, \sin(t) - \sqrt{1 - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \frac{1}{e}\right)^T.$$





25. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen f_x und f_y der Funktion f.

Lösung: Wir leiten die Funktion f einmal nach x und einmal nach y ab. Dabei bedeutet $(\dots)_t$, dass der Inhalt der Klammern nach der Variable t abgeleitet werden muss. Es gilt somit

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \left(e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}\right)_x \\
&= \left(-((\sin(x)-y)^2+\sin(\tfrac{x}{2}))\right)_x e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&= \left(-\left((\sin(x)-y)^2\right)_x - \left(\sin(\tfrac{x}{2})\right)_x\right) e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&= \left(-2\,(\sin(x)-y)_x\,(\sin(x)-y) - \left(\tfrac{x}{2}\right)_x \cos(\tfrac{x}{2})\right) e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&= \left(-2\cos(x)\,(\sin(x)-y) - \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{x}{2})\right) e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \left(e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}\right)_y \\
&= \left(-((\sin(x)-y)^2+\sin(\tfrac{x}{2}))\right)_y e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&= \left(-\left((\sin(x)-y)^2\right)_y - \left(\sin(\tfrac{x}{2})\right)_y\right) e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&= \left(-2\,(\sin(x)-y)_y\,(\sin(x)-y) - 0\right) e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&= 2\,(\sin(x)-y)\, e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}.
\end{aligned}$$

26. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und alle Sattelpunkte der Fläche F.

Lösung: Lokale Maxima und Sattelpunkte von Kurven auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, müssen die Gleichungen $f(x,y)_x = 0$ sowie $f(x,y)_y = 0$ erfüllen. Da ein Produkt genau dann Null ist, wenn einer seiner Faktoren Null ist und da die Exponentialfunktion immer grösser als Null ist, erhalten wir somit die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
-2\cos(x)\,(\sin(x)-y) - \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{x}{2}) &= 0 \\
2\,(\sin(x)-y) &= 0.
\end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung schliessen wir, dass $y = \sin(x)$ gelten muss. Daher fällt in der ersten Gleichung ein Term weg und es folgt daraus $\cos(\frac{x}{2}) = 0$. Nun gilt $\frac{x}{2} \in [0, 2\pi]$ genau dann, wenn $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{x}{2} = \frac{3}{2}\pi$ beziehungsweise $x = \pi$ oder $x = 3\pi$ gilt. Aus der Periodizität vom Cosinus folgt somit, dass $\cos(\frac{x}{2}) = 0$ erfüllt ist genau dann, wenn $x = (1+4k)\,\pi$ oder $x = (3+4k)\,\pi$ ist für $k \in \mathbb{Z}$. In beiden Fällen erhalten wir $y = \sin(x) = 0$. Die kritischen Punkte sind also die Punkte von der Form $\big((1+4k)\,\pi, 0\big)$ und $\big((3+4k)\,\pi, 0\big)$ für $k \in \mathbb{Z}$ beliebig.

Um herauszufinden, ob es sich bei den oben betrachteten kritischen Punkten um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt, kann man untersuchen, wie sich die Funktion $f(x,y)$ in einer Umgebung eines kritischen Punktes verhält (wie in der Vorlesung erwähnt).

Mathematisch würde man aber wie folgt vorgehen (das ist aber nicht Prüfungsstoff): Wir berechnen zuerst die Hessematrix in den jeweiligen Punkten. Dafür brauchen wir die zweiten

Ableitungen f_{xx}, f_{yy} sowie f_{xy} und f_{yx} (beachten Sie, dass die letzten beiden Funktionen identisch sind, da diese beide stetig sind):

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= (f_x(x,y))_x \\
&= \left(\left(-2\cos(x)\left(\sin(x)-y\right)-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{x}{2})\right)e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}\right)_x \\
&= \left(-2\cos(x)\left(\sin(x)-y\right)-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{x}{2})\right)_x e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&+ \left(-2\cos(x)\left(\sin(x)-y\right)-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{x}{2})\right)\left(e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}\right)_x \\
&= \left(-2\left(\cos(x)\left(\sin(x)-y\right)\right)_x-\tfrac{1}{2}\left(\cos(\tfrac{x}{2})\right)_x\right)e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&+ \left(-2\cos(x)\left(\sin(x)-y\right)-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{x}{2})\right)^2 e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&= \left(2\sin(x)\left(\sin(x)-y\right)-2\cos(x)^2+\tfrac{1}{4}\sin(\tfrac{x}{2})\right)e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&+ \left(-2\cos(x)\left(\sin(x)-y\right)-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{x}{2})\right)^2 e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
f_{yx}(x,y) &= (f(x,y)_y)_x \\
&= \left(2\left(\sin(x)-y\right)e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}\right)_x \\
&= 2\left(\left(\sin(x)-y\right)\right)_x e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&+ 2\left(\sin(x)-y\right)\left(e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}\right)_x \\
&= 2\cos(x)e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} \\
&+ \left(2\left(\sin(x)-y\right)\right)\left(-2\cos(x)\left(\sin(x)-y\right)-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{x}{2})\right)e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{yy}(x,y) &= (f(x,y)_y)_y \\
&= \left(2\left(\sin(x)-y\right)e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}\right)_y \\
&= 2\left(\sin(x)-y\right)_y e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} + 2\left(\sin(x)-y\right)\left(e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}\right)_y \\
&= -2e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))} + \left(2\left(\sin(x)-y\right)\right)^2 e^{-((\sin(x)-y)^2+\sin(\frac{x}{2}))}
\end{aligned}$$

Wir können nun die kritischen Punkte in die Einträge der Hessematrix einsetzten und erhalten:

$$\begin{aligned}
f_{xx}((1+4k)\pi,0) &= \left(-2\cos(\pi)^2+\tfrac{1}{4}\sin(\tfrac{1}{2}\pi)-\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{2}\pi)\right)e^{-\sin(\frac{1}{2}\pi)} \\
&= \left(-2+\tfrac{1}{4}-0\right)e^{-1} \\
&= -\tfrac{7}{4}e^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{yx}((1+4k)\pi,0) &= \left(2\cos(\pi)\right)e^{-\sin(\frac{1}{2}\pi)} \\
&= -2e^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{yy}((1+4k)\pi,0) &= -2e^{-\sin(\frac{1}{2}\pi)} \\
&= -2e^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx}((3+4k)\pi,0) &= \left(-2\cos(\pi)^2 + \tfrac{1}{4}\sin(\tfrac{3}{2}\pi) - \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{3}{2}\pi)\right) e^{-\sin(\frac{3}{2}\pi)} \\ &= \left(-2 - \tfrac{1}{4} - 0\right) e^{-1} \\ &= -\tfrac{9}{4}e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yx}((3+4k)\pi,0) &= (2\cos(\pi))\, e^{-\sin(\frac{3}{2}\pi)} \\ &= -2e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy}((3+4k)\pi,0) &= -2e^{-\sin(\frac{3}{2}\pi)} \\ &= -2e \end{aligned}$$

Beachten Sie dabei, dass die Terme $\sin(x)-y$ jeweils für beide Typen von kritischen Punkten immer Null sind, was die ganze Berechnung wieder um einiges vereinfacht. Wir können nun die Determinante der Hesse-Matrix für beide Fälle berechnen. Diese ist definiert als

$$det\,(H(x,y))) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)f_{xy}(x,y).$$

Konkret bekommen wir:

$$\begin{aligned} det\,(H((1+4k)\pi,0))) &= \left(-\tfrac{7}{4}e^{-1}\right)\left(-2e^{-1}\right) - \left(-2e^{-1}\right)\left(-2e^{-1}\right) \\ &= \left(\tfrac{7}{2} - 4\right) e^{-2} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det\,(H((3+4k)\pi,0))) &= \left(-\tfrac{9}{4}e\right)(-2e) - (-2e)(-2e) \\ &= \left(\tfrac{9}{2} - 4\right) e^{2} > 0 \end{aligned}$$

Das heisst, alle kritischen Punkte der Form $\left((1+4k)\,\pi, 0\right)$ für $k \in \mathbb{Z}$ sind Sattelpunkte, da die zugehörige Hesse-Matrix indefinit ist. Hingegen ist die Hesse-Matrix für die kritischen Punkte $\left((3+4k)\,\pi, 0\right)$ negativ definit, da zusätzlich auch $f_{xx} < 0$ ist. Die Punkte von dieser Form sind daher Maxima der Funktion f für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

27. Bestimmen Sie die Ebenengleichung der Tangentialebene an die Fläche F im Punkt

$$P = \left(\frac{\pi}{2},\, 1,\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right).$$

Lösung: Seien $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 1$ und $z_0 = e^{-\frac{-\sqrt{2}}{2}} = f(x_0, y_0)$, dann ist die Tangentialebene an die Fläche F im Punkt P gegeben durch die Formel (siehe Skript auf S. 441)

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Da $\sin(\frac{1}{2}\pi) - 1 = 0$ ist, wird das Einsetzten von x_0, y_0 in die ersten Ableitungen nach x und y wieder stark vereinfacht:

$$f_x(\tfrac{\pi}{2}, 1) = -\tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{4}\pi)e^{-\sin(\frac{1}{4}\pi)}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$= -\tfrac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$f_y(\tfrac{\pi}{2}, 1) = 0$$

Mit der obigen Formel bekommen wir schliesslich als Resultat die Ebene

$$z = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} - \tfrac{\sqrt{2}}{4} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(x - x_0\right).$$