Lösung 14

1. Aufgabe

Um das Produkt zweier Matrizen bilden zu können, muss die Anzahl Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl Zeilen der zweiten Matrix sein. Wir können somit folgende Produkte bilden:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & -15 \\ 6 & 12 & -9 \\ -4 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \end{pmatrix} = 28.$$

2. Aufgabe

(a)

$$\begin{aligned} A(2B+3C) &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left[2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 3\cdot 5 & 1\cdot 3 + 3\cdot(-4) & 1\cdot 6 + 3\cdot 4 \\ 2\cdot 5 + (-1)\cdot 5 & 2\cdot 3 + (-1)\cdot(-4) & 2\cdot 6 + (-1)\cdot 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & -9 & 18 \\ 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (AB)D &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 29 \\ -26 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Assoziativität der Matrixmultiplikation impliziert $A(BD) = \begin{pmatrix} 29 \\ -26 \end{pmatrix}$.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

$$\begin{aligned} BC &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq A. \end{aligned}$$

2. Ergebnis: (c).

Wir haben gerade gesehen, dass

$$BC \neq CB,$$

und es gilt

$$\begin{aligned} B(A + C) &= B(C + A) \\ &= BC + BA \\ &\neq CB + BA. \end{aligned}$$

3. Ergebnis: (b).

Die einzige schiefsymmetrische Matrix ist B, da

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

impliziert, dass

$$B = -B^T.$$

4. Ergebnis: (d).

Es gilt

$$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad C \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

was impliziert

$$A^T \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B^T \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad C^T \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Um das Produkt zweier Matrizen bilden zu können, muss die Anzahl Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl Zeilen der zweiten Matrix sein. Um die Addition zweier Matrizen bilden zu können, muss die Anzahl Spalten der ersten Matrix gleich der Anzahl Spalten der zweiten Matrix und die Anzahl Zeilen der ersten Matrix gleich der Anzahl Zeilen der zweiten Matrix sein.

Das heisst, dass $BC - A$ nicht wohldefiniert ist, da $BC \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.