Lösung 15

1. Aufgabe

(a) Entwicklung nach der zweiten Zeile liefert

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)\cdot 1\cdot(2\cdot 3 - 0\cdot 1) + 1\cdot 1\cdot(-1\cdot 3 - 1\cdot 1) + 0 \\ &= -10.\end{aligned}$$

(b) Entwicklung nach der zweiten Zeile liefert

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= (-1)\cdot(-1)\cdot(-2\cdot 3 + 3\cdot 1) + 0 - 2\cdot(2\cdot 3 - 1\cdot 2) \\ &= -11.\end{aligned}$$

(c) Dann haben wir

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ausrechnen mit Sarrus ergibt

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det\begin{pmatrix} -5 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (-5)\cdot(-2)\cdot 8 + 5\cdot 1\cdot(-1) + 8\cdot 1\cdot 7 - 8\cdot(-2)\cdot(-1) - (-5)\cdot 1\cdot 7 - 5\cdot 1\cdot 8 \\ &= 80 - 5 + 56 - 16 + 35 - 40 = 110.\end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) = (-10)\cdot(-11) = 110.$$

(d) Ferner gilt

$$\begin{aligned}A + B &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ausrechnen mit Sarrus ergibt

$$\begin{aligned}\det(A+B) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 1\cdot 1\cdot 6 + 0\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 3 - 0\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot 3 - 0\cdot 0\cdot 6 \\ &= 6 - 6 = 0.\end{aligned}$$

(e) Es gilt auch

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 14\\ 0 & 21 & 42\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ausrechnen mit Sarrus ergibt

$$\begin{aligned}\det\left((A+B)^2\right) &= \det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 14\\ 0 & 21 & 42\end{pmatrix}\\ &= 1\cdot 7\cdot 42 + 0\cdot 14\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 21 - 0\cdot 7\cdot 0 - 1\cdot 14\cdot 21 - 0\cdot 0\cdot 42\\ &= 294 - 294 = 0.\end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\det\left((A+B)^2\right) = \det(A+B)\cdot\det(A+B) = 0\cdot 0 = 0.$$

2. Aufgabe

(a) Ausrechnen mit Sarrus oder Laplace ergibt $\det(D_b) = 2b+4$.

(b) Die Determinante in Abhängigkeit von b ist $\det(D_b) = 8+b$. Das Gleichungssystem $D_b \cdot x = 0$ hat unendlich viele Lösungen genau dann, wenn $\det(D_b) = 0$. Folglich $b = -8$.

3. Aufgabe

Aus dem Regel 5 folgt, dass die Determinante einer (2×2)-Matrix ungleich null ist, dann und nur dann, wenn ihre Zeilen oder Spalten linear unabhängig sind. Die Zeilen einer (2×2)-Matrix sind linear unabhängig genau dann, wenn die Splaten dieser Matrix linear unabhängig sind.

(a) Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}-5 & 2\\ -6 & 1\end{pmatrix}$$

Es gilt dann

$$\det(A) = (-5)\cdot 1 - (-6)\cdot 2 = -5 + 12 = 7.$$

Das impliziert, dass v_1 und v_2 linear unabhängig sind.

(b) Betrachte die Matrix

$$B = \begin{pmatrix}10 & \frac{5}{3}\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

Es gilt dann

$$\det(B) = 10\cdot 1 - 6\cdot\frac{5}{3} = 10 - 10 = 0.$$

Das impliziert, dass v_1 und v_2 linear abhängig sind.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (a).

Die Determinante einer (2×2)-Matrix ist ungleich null, dann und nur dann, wenn ihre Zeilen oder Spalten linear unabhängig sind. In diesem Fall sind die Spalten linear abhängig, weil sie identisch sind.

2. Ergebnis: (b).

Das erste Ergebnis ist falsch, da die Matrix $(5A - B) + 3C$ eine (2 x 4)-Matrix ist und A eine (4×2)-Matrix ist. Der dritte Ausdruck ist nicht wohldefiniert, da $\left((5A-B)^T\right)^T \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $3C^T \in \mathbb{R}^{4\times 2}$. Schliesslich haben wir

$$
\begin{aligned}
(5A-B)^T + 3C^T &= \begin{pmatrix} 0 & 7 & 15 & 9 \\ -2 & 24 & -15 & 34 \end{pmatrix}^T + 3\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 24 \\ 15 & -15 \\ 9 & 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 9 & 3 \\ 9 & -3 \\ 15 & -18 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 16 & 27 \\ 24 & -18 \\ 24 & 16 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

3. Ergebnis: (a).

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

$$\det(B) = \det\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad = -ad + bc = -(ad - bc) = -\det(A).$$

4. Ergebnis: (a).

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 4.$$

Dann gilt

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = 4ad - 4bc = 4(ad - bc) = 16 \neq 8.$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{pmatrix} = a(d-b) - b(c-a) = ad - ab - bc + ab = ad - bc = 4.$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c+2a & d+2b \end{pmatrix} = a(d+2b) - b(c+2a) = ad + 2ab - bc - 2ab = ad - bc = 4.$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = 3ad - 3bc = 3(ad - bc) = 12.$$