Mathematik II
Prof. Dr. E. W. Farkas
Selim Gatti

Lösung 16

1. Aufgabe

(a) Rechne $T \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Mit (a) folgt

$$\begin{aligned} D = T^{-1}AT &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} E &= A^{-1}TD \\ &= A^{-1}T(T^{-1}AT) \\ &= A^{-1}(TT^{-1})AT \\ &= A^{-1}(I_2)AT \\ &= A^{-1}AT \\ &= I_2T \\ &= T \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Aufgabe

(a) A ist regulär, falls $\det(A) \neq 0$ ist. Mit zum Beispiel der Regel von Sarrus folgt

$$\det(A) = 8 + 0 + \lambda - 0 - 0 = 8 + \lambda.$$

Die Matrix A ist somit regulär sofern $\lambda \neq -8$ gilt.

(b) Sei also $\lambda \neq -8$. Dann ist A regulär und besitzt somit eine inverse Matrix A^{-1}. Diese kann mit der folgenden Formel berechnet werden:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix},$$

wobei $\bar{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ ist, mit A_{ij} der Untermatrix von A, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A entsteht.

Zum Beispiel ist

$$\det(A_{11}) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4. \qquad \text{und somit} \qquad \bar{a}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4,$$
$$\det(A_{21}) = \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -\lambda, \qquad \text{und somit} \qquad \bar{a}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-\lambda) = \lambda.$$

Die anderen Einträge werden ähnlich berechnet und man erhält

$$\bar{a}_{31} = -2\lambda, \quad \bar{a}_{12} = -2, \quad \bar{a}_{22} = 4, \quad \bar{a}_{32} = \lambda, \quad \bar{a}_{13} = 1, \quad \bar{a}_{23} = -2, \quad \bar{a}_{33} = 4.$$

Aus (a) wissen wir, dass $\det(A) = 8 + \lambda$. Alles einsetzen liefert für die inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{8+\lambda}\begin{pmatrix} 4 & \lambda & -2\lambda \\ -2 & 4 & \lambda \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{8+\lambda} & \frac{\lambda}{8+\lambda} & -\frac{2\lambda}{8+\lambda} \\ -\frac{2}{8+\lambda} & \frac{4}{8+\lambda} & \frac{\lambda}{8+\lambda} \\ \frac{1}{8+\lambda} & -\frac{2}{8+\lambda} & \frac{4}{8+\lambda} \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

(a) Wir berechnen

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+4Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2-Z_3]{Z_1+Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1+3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1)\cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right) = (I_3|A^{-1}).$$

Auf der linken Seite haben wir die Matrix A zur Einheitsmatrix umgeformt. Auf der rechten Seite steht jetzt also die inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen

$$(B|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1\leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2-3Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+6Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3-Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{6}\cdot Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/2 & -5/6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_2+8Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/2 & -5/6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1-2Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/6 & 1/2 & -5/6 \end{array}\right).$$

Die inverse Matrix ist also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1 & 4/3 \\ -1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/6 & 1/2 & -5/6 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & -1 & 4/3 \\ -1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/6 & 1/2 & -5/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir berechnen

$$
\begin{aligned}
(C|I_3) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[\frac{1}{2}\cdot Z_1]{Z_3 \leftrightarrow Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 - 3Z_1]{Z_3 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{Z_3 - 5Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 9/2 & 1 & 11/2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{2}{9}\cdot Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 11/9 & -10/9 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow[Z_1 - \frac{1}{2}Z_3]{Z_2 + \frac{3}{2}Z_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/9 & -1/9 & 5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 11/9 & -10/9 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Die inverse Matrix ist also

$$
C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/9 & -1/9 & 5/9 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/9 & 11/9 & -10/9 \end{pmatrix}.
$$

Ferner gilt

$$
C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/9 & -1/9 & 5/9 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/9 & 11/9 & -10/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

4. Aufgabe

(a) Wir wollen den Laplaceschen Entwicklungssatz verwenden. Wir entwickeln nach der ersten Zeile. Wir müssen also die Determinanten der Untermatrizen

$$
C_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C_{14} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 0 & b_{21} \end{pmatrix}
$$

bestimmen. In den Matrizen C_{13} und C_{14} sind die zweite und dritte Zeile linear abhängig. Daher wissen wir, dass ihre Determinanten 0 sein müssen. Dank der vielen Einträge gleich 0, lässt sich für C_{11} und C_{12} gut die Regel von Sarrus anwenden (oder eine weitere Laplacesche Entwicklung, was auf das Gleiche hinausläuft):

$$
\begin{aligned}
\det(C_{11}) &= a_{22}b_{11}b_{22} - a_{22}b_{12}b_{21} = a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = a_{22}\det(B), \\
\det(C_{12}) &= a_{21}b_{11}b_{22} - a_{21}b_{12}b_{21} = a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = a_{21}\det(B).
\end{aligned}
$$

Mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz haben wir nun

$$
\begin{aligned}
\det(C) &= c_{11}\det(C_{11}) - c_{12}\det(C_{12}) + c_{13}\det(C_{13}) - c_{14}\det(C_{14}) \\
&= a_{11}a_{22}\det(B) - a_{12}a_{21}\det(B) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\det(B) \\
&= \det(A)\det(B).
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist $\det(C) \neq 0$ genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$ und $\det(B) \neq 0$. Das heisst, C ist invertierbar genau dann, wenn sowohl A als auch B invertierbar ist.

(b) (**Optional**) Wir bemerken zunächst, dass gemäss der letzten Teilaufgabe sowohl A als auch B invertierbar ist. Dem Hinweis folgend überprüfen wir, dass aufgrund der Blockform gilt:

$$C\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0&0\\0&0&b_{11}&b_{12}\\0&0&b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\\b_{11}y_1+b_{12}y_2\\b_{21}y_1+b_{22}y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\\B\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Die Matrix C wendet also auf die ersten zwei Komponenten die Matrix A an und auf die letzten zwei Komponenten die Matrix B. Umgekehrt haben die ersten zwei Komponenten nichts mit B zu tun und die letzten zwei Komponenten nichts mit A zu tun. Wir machen für die Inverse von C daher den Ansatz

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0\\0&0\end{matrix}&B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a_{22}}{\det(A)}&\frac{-a_{12}}{\det(A)}&0&0\\\frac{-a_{21}}{\det(A)}&\frac{a_{11}}{\det(A)}&0&0\\0&0&\frac{b_{22}}{\det(B)}&\frac{-b_{12}}{\det(B)}\\0&0&\frac{-b_{21}}{\det(B)}&\frac{b_{11}}{\det(B)}\end{pmatrix},$$

da es für eine Matrix $M\in\mathbb{R}^{2\times2}$ gilt

$$M^{-1}=\frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix}m_{22}&-m_{12}\\-m_{21}&m_{11}\end{pmatrix}.$$

Wie in der oberen Rechnung erhalten wir

$$C^{-1}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{-1}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\\B^{-1}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$CC^{-1}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\z_1\\z_2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}A^{-1}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\\B^{-1}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AA^{-1}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\\BB^{-1}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\z_1\\z_2\end{pmatrix}.$$

Also ist CC^{-1} tatsächlich die Einheitsmatrix.

Bemerkung: Wir können eine Blockmatrix wie C auch in einer Matrix-Blockform darstellen:

$$C=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix},$$

wobei hier 0 für eine 2×2-Matrix mir nur Nullen steht. Für zwei solche Blockmatrizen gilt

$$\begin{pmatrix}A_1&0\\0&B_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2&0\\0&B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1A_2&0\\0&B_1B_2\end{pmatrix}.$$

Hier muss man nun daran denken, dass A_1A_2 und B_1B_2 Matrixmultiplikationen sind! Mit dieser Schreibweise ist es anschaulich, dass C^{-1} obige Gestalt haben muss, denn

$$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AA^{-1}&0\\0&BB^{-1}\end{pmatrix}.$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{1}{\pi} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. Ergebnis: (b).

Die Matrix B ist invertierbar, da wir mit Laplace berechnen können:

$$\det(B) = 1 \cdot \det(A) = a^2 + b^2 \neq 0, \text{ da } (a, b) \neq (0, 0).$$

Ferner gilt

$$B^2 = \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \neq B.$$

3. Ergebnis: (a).

Wir berechnen $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}$. Das schliesst schon die Antworten (b), (c) und (d) aus.

Bemerkung: Um zu sehen, dass (a) tatsächlich die richtige Antwort für allgemeines n liefert, führen wir vollständige Induktion durch:

Angenommen

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

dann erhalten wir via Matrixmultiplikation

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

Dies bestätigt unsere Induktionsannahme und die Richtigkeit von (a) zugleich.

4. Ergebnis: (b).

Wir sehen mit Matrixmultiplikation und den Additionstheoremen ($\star$) für $a = b = \phi$ im Hinweis, dass

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) & -2\cos(\phi)\sin(\phi) & 0 \\ 2\cos(\phi)\sin(\phi) & \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(\star)}{=} \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & -\sin(2\phi) & 0 \\ \sin(2\phi) & \cos(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit $\alpha = 2\phi$.