Lösung 17

1. Aufgabe

(a) Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Spaltenvektoren sind also orthogonal zueinander.

(b) Zunächst verwenden wir eine der Regeln aus der Vorlesung bezüglich Determinanten und multiplikativen Faktoren:

$$\det(A) = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dann berechnen wir z.B. mit der Regel von Sarrus

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} = -3^3 + 2^3 - 6^3 - (2 \cdot 3 \cdot 6) \cdot 3 = -343 = -7^3.$$

Die Determinante von A ist also -1.

(c) Wir wissen aus der Vorlesung, dass eine orthogonale Matrix orthogonale Spaltenvektoren hat. Desweiteren wissen wir, dass eine orthogonale Matrix Determinante ± 1 hat. Wir stellen die Vermutung auf, dass A eine orthogonale Matrix ist. Das Produkt von A mit ihrer Transponierten lautet

$$AA^T = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -6 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist also tatsächlich orthogonal und ihre Inverse ist gerade A^T.

2. Aufgabe

(a) Wir bringen die Matrix A und die Matrix B mit dem Gauss-Verfahren auf Zeilenstufenform. Der Rang ist dann gleich der Anzahl der Zeilen, welche nicht gleich dem Nullvektor sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3+2Z_1]{Z_2-3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\operatorname{Rang}(A) = 2$. Andererseits gilt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2-2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3+4Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist $\operatorname{Rang}(B) = 3$. Insbesondere ist also die Matrix B invertierbar.

(b) Wir berechnen nur durch Zeilenoperationen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2-2Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3+4Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_1+Z_3]{(Z_2-Z_3)\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1-3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

Auf der linken Seite haben wir die Matrix B zur Einheitsmatrix umgeformt. Auf der rechten Seite steht jetzt anstatt der Einheitsmatrix die Matrix

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch nachprüfen sehen wir, dass diese Matrix in der Tat die Inverse B^{-1} von B ist, denn

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & -2 \\ -6 & 3 & 1 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Dieses Verfahren zur Bestimmung der Inversen funktioniert nur, wenn die Matrix, die zu Beginn auf der linken Seite steht, invertierbar ist. Wäre die Matrix nicht invertierbar, dann könnte das Gauss-Verfahren nicht zur Einheitsmatrix führen.

3. Aufgabe

Die fraglichen Gleichungssysteme $Ax = 0$ sind homogen und quadratisch. Somit besitzen sie genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante der gegebenen Matrix verschwindet (ist die Determinante ungleich null, dann wäre die einzige Lösung die triviale).

(a) Hier gilt

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix} = -2\lambda^2 - 1.$$

Also ist $\det(A) = 0$ genau dann, wenn $\lambda = \frac{i}{\sqrt{2}}$ oder $\lambda = -\frac{i}{\sqrt{2}}$.

(b) Die Determinante ist

$$\det\begin{pmatrix} 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (2+\lambda)(2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2+1),$$

wobei wir zweimal nach der ersten Zeile entwickelt haben. Also hat das Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen genau dann, wenn $\lambda = \pm 2$ oder $\lambda = \pm i$.

4. Aufgabe

Wir berechnen das Produkt der beiden Matrizen und erhalten

$$\begin{aligned} BA &= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_2. \end{aligned}$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Mit der Definition des Matrix-Vektor-Produkts folgt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\pi} \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Ergebnis: (c).

Das Produkt $A \cdot B = C = (c_{ij})$ muss gleich der Einheitsmatrix $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sein. Also muss $c_{11} = 1$ gelten. Dieser Eintrag ist

$$1 = c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 2x_1 + 1 + (-2) = 2x_1 - 1$$
$$\implies 2x_1 = 2 \implies x_1 = 1.$$

Mit $c_{33} = 1$ folgt

$$1 = c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} = -1 + 1 + (-x_2) = -x_2$$
$$\implies -x_2 = 1 \implies x_2 = -1.$$

Für die Probe multiplizieren Sie die beiden Matrizen und erhalten $A \cdot B = I_3$.

3. Ergebnis: (e).

Die Antworten (a) und (d) stimmen nicht, da das Produkt nicht definiert ist. Ferner gilt

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4. Ergebnis: (a).

Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist invertierbar dann und nur dann, wenn $\det(M) \neq 0$. Es gilt

$$1 = \det(I_n) = \det(A)\det(B).$$

Das impliziert, dass

$$\det(A) \neq 0, \quad \det(B) \neq 0.$$

Das heisst, dass A und B invertierbar sind.