Lösung 18

1. Aufgabe

Die Inversen sind:

(a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$,

(b) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(d) $\begin{pmatrix} \cos(-\phi) & -\sin(-\phi) \\ \sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$.

2. Aufgabe

Wir geben jeweils nur die bei der Durchführung des Gauss-Verfahrens auftretenden Zwischenschritte und das Endergebnis an.

(a)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -5 & 3 \\ 7 & 9 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+7Z_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -5 & 3 \\ 0 & -26 & 26 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3+Z_1]{Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = -3, \\ z = 0. \end{cases}$$

(c) Wir tauschen zuerst die ersten beiden Zeilen und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+0.5Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}z, \\ y = -\frac{1}{2}z, \\ z \text{ beliebig.} \end{cases}$$

(d)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3-3Z_1]{Z_2+2Z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3+Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}w, \\ y = \frac{7}{4} - \frac{3}{4}w, \\ z = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}w, \\ w \text{ beliebig.} \end{cases}$$

3. Aufgabe

(a) Entwicklung nach der ersten Zeile liefert

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \lambda[2(\lambda-1) + 2\cdot 3] + 1[0\cdot 3 - 1\cdot(\lambda-1)] = 2\lambda^2 + 3\lambda + 1.$$

Es folgt

$$\det(A) = 0 \iff \lambda = -1 \text{ oder } \lambda = -\frac{1}{2}.$$

(b) (i) Die lineare Gleichung $Ax = 0$ ist genau dann nur trivial lösbar, wenn $\det(A) \neq 0$, beziehungsweise $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ ist.

(ii) Die lineare Gleichung $Ax = 0$ besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn $\lambda \in \{-1, -\frac{1}{2}\}$ ist. Anwendung des Gauss-Verfahrens liefert nämlich im Falle $\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 + Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 + 1.5 Z_2]{(-0.5)\cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z, \\ y = -z, \\ z \text{ beliebig}, \end{cases}$$

und im Falle $\lambda = -\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 + 2Z_1]{(-2)\cdot Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 - Z_2]{(-2)\cdot Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2z, \\ y = -\frac{4}{3}z, \\ z \text{ beliebig}. \end{cases}$$

(c) Dies ist der Fall genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$, beziehungsweise, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ gilt.

(d) Unabhängig von λ ist

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

stets eine Lösung von $Ax = b$. Im Falle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}\}$ sind dies bereits alle Lösungen. Im Falle $\lambda = -1$ ist (vgl. (b)) jede Lösung x von der Form

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t - 1 \end{pmatrix},$$

im Falle $\lambda = -\frac{1}{2}$ ist sie (vgl. (b)) von der Form

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + = \begin{pmatrix} 6t \\ -4t \\ 3t - 1 \end{pmatrix},$$

jeweils für ein $t \in \mathbb{C}$.

4. Aufgabe

1. Es gilt

$$(a\ b\ c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2-2Z_1]{Z_3-3Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3-4Z_2]{Z_4-4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_4-2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang der $(4,3)$-Matrix $(a\ b\ c)$, gebildet aus den drei Vektoren als Spalten, hat also Rang 2, was kleiner als $n = 3$ ist. Die Vektoren sind deswegen linear abhängig. Wie finden wir eine Linearkombination, die einen der Vektoren als Kombination der anderen angibt? Entweder durch Raten oder daraus, dass wegen der gezeigten linearen Abhängigkeit eine Linearkombination $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ existieren muss, in der nicht alle λ_i verschwinden.

Sei also $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$. Mit anderen Worten

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 8\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt aus der ersten Komponente $\lambda_1 = -3\lambda_3$ und daraus eingesetzt in die restlichen Komponenten jeweils immer $\lambda_2 = 2\lambda_3$. Wir können somit zum Beispiel $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ wählen. Es gilt also $3a - 2b - c = 0$. Eine Linearkombination könnte somit $c = 3a - 2b$ sein.

2. Es gilt

$$\det(a\ b\ c) = \det \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -3 - 2 - 1 + 4 = -2 \neq 0.$$

Die Determinante der Matrix $(a\ b\ c)$, gebildet aus den drei Vektoren als Spalten, ist also ungleich null. Die Vektoren sind deswegen linear unabhängig.

3. Es gilt

$$\det(a\ b\ c) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} = -7 + 16 + 4 - 1 + 16 - 28 = 0.$$

Die Determinante der Matrix $(a\ b\ c)$, gebildet aus den drei Vektoren als Spalten, ist gleich null. Die Vektoren sind deswegen linear abhängig. Wir suchen nun eine Linearkombination. Sei $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$. Mit anderen Worten

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 + 8\lambda_3 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - 7\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

welches man zum Beispiel mit dem Gaussverfahren lösen kann. Man findet als mögliche Lösung (es gibt unendlich viele, da die Vektoren ja linear abhängig sind) zum Beispiel $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. Es gilt also $-3a + 2b - c = 0$. Eine Linearkombination könnte somit $c = -3a + 2b$ sein.

4. Die Anzahl Vektoren (=3) ist grösser als die Dimension des Raumes, aus dem sie stammen (=2). Die Vektoren sind also linear abhängig. In der Tat sieht man zum Beispiel sofort $c = a - 5b$.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (a).

Rechne mit der Regel von Sarrus nach, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} = 0.$$

Damit ist die Matrix nicht invertierbar und die Vektoren sind liner abhängig.

2. Ergebnis: (a).

Die Rechenregel 2 für Determinanten von $(n \times n)$- Matrizen lautet:

Bei Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten der Matrix ändert die Determinante ihr Vorzeichen.

3. Ergebnis: (b).

Das lineare Gleichungssystem besitzt genau dann nicht-triviale Lösungen, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Es ist $\det \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 4 & -2\lambda \end{pmatrix} = -2\lambda^2 - 8$ und die Gleichung $-2\lambda^2 - 8 = 0$ hat genau $\lambda = 2i$ oder $\lambda = -2i$ als Lösungen.

4. Ergebnis: (d).

Für $\alpha = 2$ und $\beta \neq -1$ hat das System keine Lösung, denn die letzte Zeile ist $0 = \beta + 1 \neq 0$. Für $\alpha = 2$ und $\beta = -1$ hat das System unendlich viele Lösungen, denn die letzte Zeile ist $0 = 0$. Das heisst, dass es 2 Gleichungen und 3 Unbekannte bleiben. Für $\alpha = -1 \neq 2$ und zum Beispiel $\beta = 0$ hat das System keine Lösung, denn Zeile 2 lautet $0 = -1$.

Für $\beta = -1$ sind die Zeilen 2 und 3 jeweils entweder $0 = 0$, dann gibt es unendlich viele Lösungen; oder ergeben $x_2 = 0$, beziehungsweise $x_3 = 0$. In jedem Fall hat das System mindestens eine Lösung.