Lösung 19

1. Aufgabe (Prüfung FS 2022)

(a)
$$\det(A) = \mu - 1.$$

(b)
$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -5 & 7 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir führen Zeilenoperationen durch;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3-2Z_1]{Z_2-Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3-Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wählen wir $x_3 = t \in \mathbb{R}$ als freien Parameter, so ergibt sich $x_2 = 1 + 3x_3 = 1 + 3t$ und $x_1 = 1 - x_3 = 1 - t$. Die gesuchten Lösungen sind daher
$$x = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1+3t \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(d) Das charakteristische Polynom von B ist

$$\det(B - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 4 & 2 \\ 5 & -9-\lambda & -5 \\ 3 & -5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = -\lambda^2(\lambda + 14).$$

Die Matrix B hat also den doppelten Eigenwert 0 und den einfachen Eigenwert -14. Einen Eigenvektor zum Eigenwert 0 finden wir mit Zeilenoperationen;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & -9 & -5 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2+Z_1-Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1+Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -3 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{Z_3-3Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Daraus ergibt sich $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_2 = 0$ und $x_1 = x_2 + x_3 = t$. Die Eigenvektoren sind also

$$x = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Normiert ist dieser Vektor wenn $1 = \|x\| = \sqrt{t^2 + t^2}$, also wenn $t = \pm 1/\sqrt{2}$.

2. Aufgabe

(a) Die Eigenwerte von $A(\mu)$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det\begin{pmatrix} 1-\mu-x & 0 & \mu \\ \mu & 1-\mu-x & 0 \\ 0 & \mu & 1-\mu-x \end{pmatrix} = (1-\mu-x)^3 + \mu^3,$$

also die Zahlen $x = 1-\mu+\zeta\mu$ mit $\zeta^3 = 1$. Die letzte Gleichung wird erfüllt für $\zeta_1 = 1$ sowie $\zeta_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, woraus wir

$$x_1 = 1, \qquad x_2(\mu) = 1 - \frac{3}{2}\mu + \frac{\sqrt{3}}{2}i\mu, \qquad x_3(\mu) \quad = \quad 1 - \frac{3}{2}\mu - \frac{\sqrt{3}}{2}i\mu$$

erhalten. Der erste Eigenwert x_1 ist damit unabhängig von μ, während $x_2(\mu)$ und $x_3(\mu)$ zwei zur reellen Achse symmetrische Geraden in $\mathbb{C}$ sind, die sich für $\mu = 0$ in $z = 1$ schneiden. Alle drei Eigenwerte sind somit nur dann reell, wenn $\mu = 0$ gilt. Als zugehörige Eigenvektoren berechnet man

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_3 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}$$

bzw. jedes komplexe Vielfache ungleich 0 hiervon. Insbesondere stellt man fest, dass die Eigenvektoren nicht von μ abhängen.

(b) Zunächst stellen wir fest, dass $A^{-1}(\mu)$ für alle μ existiert, da nach **a)** $x = 0$ nie ein Eigenwert von $A(\mu)$ ist. Die Eigenvektoren von $A^{-1}(\mu)$ stimmen mit denen von $A(\mu)$ überein und haben den dazu inversen Eigenwert. Gilt nämlich $A(\mu)v = xv$, so folgt

$$v = A^{-1}(\mu)A(\mu)v = A^{-1}(\mu)(xv) = xA^{-1}(\mu)v \quad \text{bzw.} \quad A^{-1}(\mu)v = \frac{1}{x}v.$$

Dies gilt ganz allgemein und zeigt in dem speziellen Fall hier, dass die Eigenvektoren von $A^{-1}(\mu)$ die Vielfachen ungleich 0 der oben berechneten Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind. Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{x_1} = 1, \qquad \tilde{x}_2(\mu) = \frac{1}{x_2(\mu)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}\mu + \frac{\sqrt{3}}{2}i\mu}, \qquad \tilde{x}_3(\mu) = \frac{1}{x_3(\mu)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{2}\mu - \frac{\sqrt{3}}{2}i\mu}.$$

Weiterhin stellt man fest, dass die Punkte $\tilde{x}_2(\mu)$ und $\tilde{x}_3(\mu)$ zwei bezüglich der reellen Achse spiegelsymmetrische Kreise durch die Punkte 0, 1, ζ_2 bzw. die Punkte 0, 1, ζ_3 bilden. Für all diese Überlegungen war es nicht notwending, die inverse Matrix $A^{-1}(\mu)$ explizit zu bestimmen. Man kann dies aber trotzdem tun und findet

$$A^{-1}(\mu) = \frac{1}{1 - 3\mu + 3\mu^2} \begin{pmatrix} 1 - 2\mu + \mu^2 & \mu^2 & \mu(\mu-1) \\ \mu(\mu-1) & 1 - 2\mu + \mu^2 & \mu^2 \\ \mu^2 & \mu(\mu-1) & 1 - 2\mu + \mu^2 \end{pmatrix}.$$

(c) (**Optional**)

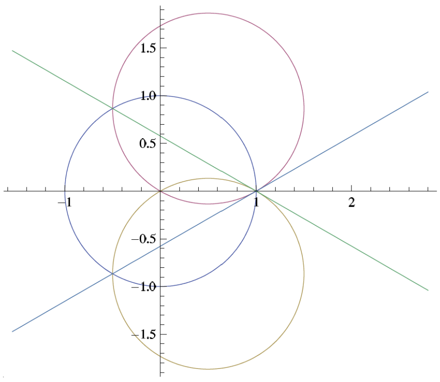

Abbildung: Die Eigenwerte $x_j(\mu)$ und $\tilde{x}_j(\mu)$, $j = 1, 2, 3$. Die Punkte $x_2(\mu)$ (blau) und $x_3(\mu)$ (grün) bilden die beiden Geraden. Die Punkte $\tilde{x}_2(\mu)$ (gelb) und $\tilde{x}_3(\mu)$ (violett) bilden die beiden Kreise, allerdings ohne den Punkt $z = 0$, der als Eigenwert nicht auftreten kann, da alle Matrizen $A(\mu)$ invertierbar sind. Die beiden Geraden und die beiden Kreise gehen durch $x_1 = \tilde{x}_1 = 1$, den einzigen Eigenwert der Matrix $A(0) = I_3$.

3. Aufgabe

(a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

und hat Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$. Als zugehörige Eigenvektoren finden wir $v_1 = (-1,1)^T$ und $v_2 = (-2,1)^T$.

(b) Die zu bildende Matrix T ist $T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Die Inverse hiervon ist $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Es folgt

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen fest, dass es sich bei D um eine Diagonalmatrix handelt. Allgemein hat eine Diagonalmatrix die Form

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass man das Produkt zweier Diagonalmatrizen bilden kann, indem man die Einträge auf der Diagonalen multipliziert, d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}d_{nn} \end{pmatrix},$$

insbesondere erhält man wieder eine Diagonalmatrix.

(c) Nach **b)** ist $A = TDT^{-1}$. Dann ist $A^2 = (TDT^{-1})(TDT^{-1}) = TD(T^{-1}T)DT^{-1} = TD(I_2)DT^{-1} = TD^2T^{-1}$, induktiv ist damit $A^{99} = TD^{99}T^{-1}$. Mit der Bemerkung aus **b)** zur Matrixmultiplikation von Diagonalmatrizen können wir D^{99} leicht berechnen. Es folgt

$$\begin{aligned} A^{99} &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{99} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2^{100} & 2+2^{100} \\ -1-2^{99} & -2-2^{99} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Aufgabe

Es ist jeweils zu entscheiden, ob die Gleichung $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_2 c = 0$ mit $\lambda_i \in \mathbb{C}$ nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ besitzt.

(a) Hier folgt $\lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda_3$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Damit sind die Vektoren a, b und c linear unabhängig.

(b) Mit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -1$ gilt $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$, d.h. die Vektoren a, b und c sind linear abhängig.

(c) Aus der dritten Zeile folgt $\lambda_1 = 0$, dann aus der zweiten Zeile $\lambda_2 = 0$ und schliesslich $\lambda_3 = 0$. Somit sind die Vektoren linear unabhängig.

(d) Mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1 - i$ gilt $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ und damit lineare Abhängigkeit.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (b).

Jeder Eigenvektor von A^{-1} ist ein Eigenvektor von A, und

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i-1-i \\ -4+4i+1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3+5i \end{pmatrix} \neq c \begin{pmatrix} -1+i \\ 1+i \end{pmatrix}, \text{ für ein } c \in \mathbb{R}.$$

2. Ergebnis: (d).

Die Eigenwerte von A^{-1} sind der Kehrwert der Eigenwerte von A. Ferner gilt

$$Av = \lambda v \implies A^2 v = \lambda A v = \lambda^2 v.$$

Das heisst, falls v Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, so ist v Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert $\lambda^2 > 0$. Betrachte nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so hat A die zwei verschiedenen Eigenwerte 1 und -1, aber $A^2 = I_2$ hat nur den Eigenwert 1.

3. Ergebnis: (a).

Für $b \neq 0$ gilt

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner gilt

$$EF = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und daher sind die Eigenwerte von EF gleich -2, $-b$, 1. Die Summe der Eigenwerte ist also $-b-1 < 0$ falls $b > 0$. Die Determinante von EF ist $(-2) \cdot (-b) \cdot 1 = 2b \in \mathbb{R}$ falls $b \in \mathbb{R}$. Schliesslich sind die Eigenwerte von E gleich $\pm i\sqrt{b}$ und 1.

4. Ergebnis: (c).

Wir sehen mit Matrixmultiplikation und den Additionstheoremen $(\star)$ für $a = b = \phi$ im Hinweis, dass

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) & -2\cos(\phi)\sin(\phi) & 0 \\ 2\cos(\phi)\sin(\phi) & \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(\star)}{=} \begin{pmatrix} \cos(2\phi) & -\sin(2\phi) & 0 \\ \sin(2\phi) & \cos(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2\phi$.