Lösung 20

1. Aufgabe

(a) Als Erstes ersetzen wir y' durch $\frac{dy}{dx}$ und trennen die Variablen x, y auf verschiedene Seiten der Gleichung

$$y'(x) = -xy(x) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -xy \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = -x\,dx.$$

Als Zweites integrieren wir auf beiden Seiten der erhaltenen Gleichung und fassen die zwei Integrationskonstanten zu einer zusammen

$$\frac{1}{y}\,dy = -x\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int -x\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Zum Schluss müssen wir die erhaltene Gleichung nach y auflösen

$$\begin{aligned} \ln(|y|) = -\frac{1}{2}x^2 + C \quad &\Longrightarrow \quad |y| = e^{-\frac{1}{2}x^2 + C} = e^C e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &\Longrightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^C}_{=\tilde{C}} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \tilde{C}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{mit einer neuen Konstante } \tilde{C} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -xy(x)$ ist also $y(x) = \tilde{C}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Mit der Anfangsbedingung $y(0) = \tilde{C} = 3$ folgt für die Lösung des Anfangswertproblems somit

$$y(x) = 3e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

(b) Wir verfahren wie in der Teilaufgabe a)

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{x^2}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int -\frac{1}{x^2}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \ln(|y|) = \frac{1}{x} + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Auflösen nach y liefert

$$\begin{aligned} \ln(|y|) = \frac{1}{x} + C \quad &\Longrightarrow \quad |y| = e^{\frac{1}{x} + C} = e^C e^{\frac{1}{x}} \\ &\Longrightarrow \quad y = \underbrace{\pm e^C}_{=\tilde{C}} e^{\frac{1}{x}} = \tilde{C}e^{\frac{1}{x}} \quad \text{mit einer neuen Konstante } \tilde{C} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = -\frac{y(x)}{x^2}$ ist also $y(x) = \tilde{C}e^{\frac{1}{x}}$ mit $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Mit der Bedingung $y(1) = \tilde{C}e = e$ (und somit $\tilde{C} = 1$) folgt für die Lösung des Anfangswertproblems somit

$$y(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

(c) Wir verfahren wie in der Teilaufgabe a)

$$y(x)y'(x) = e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y\frac{dy}{dx} = e^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y\,dy = e^{2x}\,dx.$$

Daraus folgt

$$y\,dy = e^{2x}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \int y\,dy = \int e^{2x}\,dx \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}.$$

Auflösen nach y liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}e^{2x} + C \quad &\implies \quad y^2 = e^{2x} + 2C \\ &\implies \quad y = \pm\sqrt{e^{2x} + 2C} = \pm\sqrt{e^{2x} + \tilde{C}} \quad \text{mit einer neuen Konstante } \tilde{C} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y(x)y'(x) = e^{2x}$ ist also $y(x) = \sqrt{e^{2x} + \tilde{C}}$ oder $y(x) = -\sqrt{e^{2x} + \tilde{C}}$ mit einer Konstante $\tilde{C} \in \mathbb{R}$. Mit der Bedingung $y(0) = -1$ folgt, dass wir die Lösung mit dem Minuszeichen wählen müssen und $\tilde{C} = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y(x) = -\sqrt{e^{2x}} = -e^x.$$

2. Aufgabe

(a) Die homogene Differentialgleichung lautet umgeschrieben $y'(x) - y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(-\int -1\, dx\right) = Ke^x \qquad \text{mit einer Konstante } K \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^x,$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$y'(x) = y(x) + x \qquad \iff \qquad K'(x)e^x + K(x)e^x = K(x)e^x + x.$$

Wir haben also $K'(x) = xe^{-x}$ und somit

$$K(x) = \int xe^{-x}\, dx \overset{(*)}{=} -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C \qquad \text{mit einer Konstante } C \in \mathbb{R},$$

wobei wir in $(*)$ partielle Integration gebraucht haben. Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^x = Ce^x - x - 1 \qquad \text{mit einer Konstante } C \in \mathbb{R}.$$

(b) Die homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) - y(x) = 0$ (wie in Teilaufgabe a)). Somit ist die Lösung davon wieder $y(x) = Ke^x$ mit einer Konstante $K \in \mathbb{R}$. Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^x,$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$y'(x) - y(x) = xe^{-x} \qquad \iff \qquad (K'(x)e^x + K(x)e^x) - K(x)e^x = xe^{-x}.$$

Wir haben also $K'(x) = xe^{-2x}$ und somit

$$K(x) = \int xe^{-2x}\, dx \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\, dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \qquad \text{mit einer Konstante } C \in \mathbb{R},$$

wobei wir in $(*)$ partielle Integration gebraucht haben. Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^x = Ce^x - \frac{1}{2}e^{-x}\left(x + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{mit einer Konstante } C \in \mathbb{R}.$$

(c) Die homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) + 2y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(-\int 2\,dx\right) = Ke^{-2x} \qquad \text{mit einer Konstante } K \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = K(x)e^{-2x},$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$y'(x) + 2y(x) = e^{3x} \qquad \iff \qquad (K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-2x}) + 2K(x)e^{-2x} = e^{3x}.$$

Wir haben also $K'(x) = e^{5x}$ und somit

$$K(x) = \int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C \qquad \text{mit einer Konstante } C \in \mathbb{R}.$$

Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = K(x)e^{-2x} = Ce^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x} \qquad \text{mit einer Konstante } C \in \mathbb{R}.$$

(d) Die homogene Differentialgleichung lautet umgeschrieben $y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = 0$ mit Lösung

$$y(x) = K \exp\left(-\int \frac{1}{x}\,dx\right) = Ke^{-\ln(|x|)} = \frac{K}{|x|} = \frac{K}{x} \qquad \text{mit einer Konstante } K \in \mathbb{R}.$$

Hierbei können wir die Betragsstriche wegfallen lassen, da $x > 0$. Für die Lösung der inhomogenen Gleichung brauchen wir somit den Ansatz

$$y(x) = \frac{K(x)}{x},$$

welchen wir in die inhomogene Differentialgleichung einsetzen

$$y'(x) = x^2 + 4 - \frac{y(x)}{x} \qquad \iff \qquad \left(\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}\right) = x^2 + 4 - \frac{K(x)}{x^2}.$$

Wir haben also $K'(x) = x^3 + 4x$ und somit

$$K(x) = \int x^3 + 4x\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + C \qquad \text{mit einer Konstante } C \in \mathbb{R}.$$

Dieses $K(x)$ setzen wir in den gewählten Ansatz ein. Es folgt für die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{C}{x} + \frac{1}{4}x^3 + 2x \qquad \text{mit einer Konstante } C \in \mathbb{R}.$$

Mit der Bedingung $y(2) = 10$ ergibt sich die Konstante $C = 8$. Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{8}{x} + \frac{1}{4}x^3 + 2x,$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

3. Aufgabe

(a) Wir versuchen die Methode der Trennung der Variablen. In diesem Fall bekommen wir

$$\begin{aligned} (1+x)\frac{dy}{dx} = y^2 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{1+x} \\ &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{y} + C = \log(|1+x|) \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{-\log(|1+x|) + C}, \end{aligned}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

(b) Wir machen den Ansatz $y(x) = g(x)e^{-2x}$. Dann gilt insbesondere

$$y'(x) + y(x) = g'(x)e^{-2x} - 2g(x)e^{-2x} + g(x)e^{-2x} = (g'(x) - g(x))e^{-2x}.$$

Daher ist die gegebene Differentialgleichung

$$e^{-2x} \stackrel{!}{=} y'(x) + y(x) = (g'(x) - g(x))e^{-2x}$$

dann erfüllt, falls g der Differentialgleichung $g'(x) = g(x) + 1$ genügt. Die allgemeine Lösung hiervon lautet $g(x) = -1 + Ce^x$. Es folgt $y(x) = Ce^{-x} - e^{-2x}$, mit $C \in \mathbb{R}$.

(c) Wir versuchen die Methode der Trennung der Variablen. In diesem Fall bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{y} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2}dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{1}{2}dx \\ &\Longrightarrow \quad 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}C\right)^2, \end{aligned}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

(d) Wir versuchen wieder die Methode der Trennung der Variablen. Dieses Mal bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = e^{-x}e^{y} \quad &\Longrightarrow \quad e^{-y}dy = e^{-x}dx \quad \Longrightarrow \quad \int e^{-y}dy = \int e^{-x}dx \\ &\Longrightarrow \quad -e^{-y} = -e^{-x} + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = -\log\left(e^{-x} - C\right), \end{aligned}$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

(e) Zunächst bemerken wir, dass wir die Differentialgleichung mit dividieren durch $\cos(x)$ auf beiden Seiten zu einer homogenen linearen Differentialgleichung umformulieren können; $y'(x) + \tan(x)y(x) = \cos(x)$. Die Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung $y' + \tan(x)y = 0$ ist

$$y(x) = K\exp\left(-\int \tan(x)dx\right) = K|\cos(x)| = K\cos(x).$$

Hierbei können wir die Betragsstriche wegfallen lassen, da $\cos(x) > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Nun benutzen wir die Variation der Konstanten und machen den Ansatz $y(x) = K(x)\cos(x)$. Dann muss gelten

$$\cos(x) = y'(x) + \tan(x)y(x) = K'(x)\cos(x) - K(x)\sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}K(x)\cos(x) = K'(x)\cos(x),$$

also $K(x) = x + C$. Insgesamt erhalten wir die Lösung

$$y(x) = K(x)\cos(x) = (x + C)\cos(x).$$

4. Aufgabe

(a) Eine erratbare partikuläre Lösung ist beispielsweise $y_p(x) = -\frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist damit

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2},$$

mit einer frei wählbaren Konstante $C \in \mathbb{R}$. Wählt man statt zu raten die Methode der Variation der Konstanten, so führt dies auf den Ansatz

$$y(x) = C(x)e^{2x}.$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung liefert

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = C'(x)e^{2x} = 1,$$

also $C(x) = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$. Setzt man dies in den gewählten Ansatz ein, so folgt wie oben

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2},$$

mit $C \in \mathbb{R}$.

(b) Durch Raten finden wir hier die partikuläre Lösung $y_p(x) = x - 1$. Somit lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{-x} + x - 1,$$

mit $C \in \mathbb{R}$ beliebig. Variation der Konstanten liefert wie bei (a) für $C(x)$ die Differentialgleichung

$$C(x)e^{-x} = x.$$

Diese besitzt die Lösung $C(x) = \int xe^{x} dx = (x-1)e^{x} + C$. Einsetzen von $C(x)$ in den Ansatz führt auf die gleiche Lösung $y(x)$, die bereits oben durch Raten gefunden wurde.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (a).

Mit $y(x) = x^n$ erhalten wir

$$y'(x) = nx^{n-1}, \quad y''(x) = n(n-1)x^{n-2}.$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhalten wir

$$n(n-1)\frac{x^n}{2} - nx^n + x^n = 0,$$

und sehen, dass die Gleichung nur im Fall $n = 2$ erfüllt ist.

2. Ergebnis: (c).

Die zugehörige homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) = 3y(x)$. Lösungen sind $y = 0$ oder $y_H(x) = Ke^{3x}$, mit $K \in \mathbb{R}$, da $\int 3\,dx = 3x$.
Explizit lässt sich dies mit Trennung der Variablen nachrechnen:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3\,dx$$
$$\ln|y| = 3x + C,\ C \in \mathbb{R}$$
$$|y| = Ke^{3x},\ K = e^C > 0$$
$$y = Ke^{3x},\ K \in \mathbb{R}.$$

Also ist die allgemeine Lösung der homogene Differentialgleichung gleich $y_H(x) = Ke^{3x},\ K \in \mathbb{R}$. Mit einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen DGL ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$.
Einsetzen in die DGL zeigt, dass $y_p(x) = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$ eine èartikuläre Lösung ist, aber $y_p(x) = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$ nicht. Insgesamt haben wir als allgemeine Lösung

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x) = Ke^{3x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x,$$

mit $K \in \mathbb{R}$.

3. Ergebnis: (e).

Wir berechnen zunächst die Ableitung der angegebenen Funktion. Zum Beispiel mit Hilfe der Quotientenregel folgt

$$f'(t) = \frac{350 \cdot 0,21 \cdot a \cdot e^{-0,21 \cdot t}}{(ae^{-0,21 \cdot t} + 1)^2} = \frac{73,5 \cdot a \cdot e^{-0,21 \cdot t}}{(ae^{-0,21 \cdot t} + 1)^2}.$$

Jetzt setzen wir die angegebene Funktion in die rechte Seite der DGL ein und erhalten

$$0,0006 \cdot \left(350 - \frac{350}{ae^{-0,21 \cdot t} + 1}\right) \cdot \frac{350}{ae^{-0,21 \cdot t} + 1} = \frac{73,5 \cdot a \cdot e^{-0,21 \cdot t}}{(ae^{-0,21 \cdot t} + 1)^2} = f'(t).$$

Also ist die angegebene Funktion für jedes $a > 0$ eine Lösung der DGL.

4. Ergebnis: (b).

Das Gesetz besagt, dass die Temperaturänderung $x'(t)$ eines Körpers proportional zur Differenz der Temperatur des Körpers zu der Umgebungstemperatur ist. Mit einer Konstanten $h > 0$ ist zunächst $x'(t) = \pm h(T - x(t))$.

Wenn die Umgebungstemperatur T höher als die Temperatur des Körpers ist, also $T - x(t) > 0$, steigt die Körpertemperatur, also $x'(t) > 0$. Genauso: Wenn die Umgebungstemperatur T tiefer als die Temperatur des Körpers ist, also $T - x(t) < 0$, sinkt die Körpertemperatur, also $x'(t) < 0$. Damit ist $x'(t) = h(T - x(t))$.