Lösung 21

1. Aufgabe

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$y(x) = Ce^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Setzt man also $y(x) = C(x)e^x$ (Variation der Konstanten) als Ansatz in die inhomogene Gleichung ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} y' &= y + \sin(x) \\ \Leftrightarrow \quad \big(C(x)\,e^x\big)' &= C(x)\,e^x + \sin(x) \\ \Leftrightarrow \quad C'(x)\,e^x + C(x)\,e^x &= C(x)\,e^x + \sin(x) \\ \Leftrightarrow \quad C'(x)\,e^x &= \sin(x) \\ \Leftrightarrow \quad C'(x) &= e^{-x}\sin(x). \end{aligned}$$

Als Stammfunktion von $e^{-x}\sin(x)$ finden wir mittels partieller Integration

$$C(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung $y' = y + \sin(x)$ lautet also:

$$y(x) = C(x)\,e^x = \left(-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + c\right)e^x = c\,e^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich die Konstante c zu $\frac{3}{2}$:

$$y(x) = \frac{3}{2}\,e^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x).$$

2. Aufgabe

(a) Wir wissen, dass die Differentialgleichung $y'(x) = ay(x) + b$ mit konstanten Koeffizienten die allgemeine Lösung

$$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

hat. Also hier mit $a = -4$ und $b = 8$ folgt $y(x) = Ce^{-4x} + 2, C \in \mathbb{R}$.

(b) Die homogene Differentialgleichung lautet $y'(x) = 2y(x)$. Eine Stammfunktion von 2 ist $2x$. Somit ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y(x) = Ce^{2x}, C \in \mathbb{R}$.

Wegen $y(0) = 1$, erhalten wir $C = 1$, so dass die Lösung des Anfangswertproblems $y = e^{2x}$ ist.

(c) Die Differentialgleichung ist homogen und umgeschrieben $y'(x) = -xy(x)$. Eine Stammfunktion von $-x$ ist $\frac{-x^2}{2}$. Somit ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y(x) = Ke^{-\frac{x^2}{2}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

(d) Da wir die Lösung der homogenen Differentialgleichung aus Teilaufgabe (c) haben, ersetzen wir die Integrationskonstante K durch eine Funktion $K(x)$ und versuchen, die inhomogene Differentialgleichung durch den Produktansatz $y = K(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ zu lösen (Variation der Konstanten). Durch Produkt- und Kettenregel erhalten wir

$$y' = K'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xK(x)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Wir setzen nun die für y und y' gefundenen Terme in die inhomogene Differentialgleichung

$$K'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xK(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + xK(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (x-1)e^{-x}.$$

Somit $K'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = (x-1)e^{-x} \implies K'(x) = (x-1)e^{\frac{x^2}{2}-x}$. Jetzt verwenden wir den **Hinweis** mit $f(x) = \frac{x^2}{2} - x$. Dann gilt $K(x) = c + e^{\frac{x^2}{2}-x}$. Deshalb ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-x}, c \in \mathbb{R}$.

(e) Die dazugehörige homogene Differentialgleichung ist $y'(x) = (3x^2+1)y(x)$ und deren Lösung ist $y(x) = Ke^{x^3+x}$ für ein beliebiges $K \in \mathbb{R}$. Jetzt versuchen wir, die inhomogene Differentialgleichung durch den Produktansatz $y = K(x)e^{x^3+x}$ zu lösen (Variation der Konstanten). Durch Produkt- und Kettenregel erhalten wir

$$y' = K'(x)e^{x^3+x} + (3x^2+1)K(x)e^{x^3+x}.$$

Wir setzen nun die für y und y' gefundenen Terme in die inhomogene Differentialgleichung

$$K'(x)e^{x^3+x} + (3x^2+1)K(x)e^{x^3+x} - (3x^2+1)K(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{x^3}.$$

Somit $K'(x)e^{x^3+x} = e^{x^3} \implies K'(x) = e^{-x}$. Das heisst $K(x) = c - e^{-x}$. Deshalb ist die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $y(x) = ce^{x^3+x} - e^{x^3}, c \in \mathbb{R}$. Wegen $y(0) = 1$ gilt

$$1 = c - 1 \Leftrightarrow c = 2.$$

Damit lautet die eindeutige Lösung des Anfangwertsproblems $y(x) = 2e^{x^3+x} - e^{x^3}$.

(f) Die Differentialgleichung ist homogen. Eine Stammfunktion von $\sin(x)$ ist $-\cos(x)$. Somit ist die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y(x) = Ke^{-\cos(x)}$, $K \in \mathbb{R}$. Wegen $y(0) = 100$ gilt

$$100 = Ke^{-1} \Leftrightarrow K = 100e.$$

Damit lautet die eindeutige Lösung des Anfangwertsproblems $y(x) = 100e^{-\cos(x)+1} = 100e^{1-\cos(x)}$.

(g) Es ist $y'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{y(x)}{x} + 1\right) = \frac{1}{2x}y(x) + \frac{1}{2}$ linear, und wir suchen die allgemeine Lösung mit Variation der Konstanten: Die homogene Gleichung ist $y'(x) = \frac{1}{2x}y(x)$ und mit $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\log(x) + C$ folgt

$$y(x) = Ke^{\frac{1}{2}\log(x)} = K\sqrt{x}, \quad x > 0.$$

Der Ansatz für die inhomogene Gleichung ist also $y(x) = K(x)\sqrt{x}$. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$K'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow K(x) = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + C,$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ und somit ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = K(x)\sqrt{x} = x + C\sqrt{x}, \qquad \text{für eine Konstante } C \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist die Lösung mit $y(4) = 3$, daraus folgt

$$C = -\frac{1}{2} \implies y(x) = x - \frac{1}{2}\sqrt{x}.$$

3. Aufgabe

(a)

$$y'(x) + y(x)\sin(x) = \sin(x) \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) = -\sin(x)y(x) + \sin(x)$$

.

1. Variante: Separation der Variabeln
Schreibe die Differentialgleichung in der Form:

$$\begin{array}{rcll} \frac{dy}{dx} &=& \sin(x)(1-y) & \\ \frac{dy}{1-y} &=& \sin(x)dx & \mid \int \\ -\log|1-y| &=& -\cos(x)+c_1 & \mid \cdot(-1) \\ \log|1-y| &=& \cos(x)-c_1 & \mid \exp() \\ 1-y &=& \pm e^{-c_1}e^{\cos(x)}, \quad c_1 \in \mathbb{R}. & \end{array}$$

Es folgt

$$y(x) = 1 + Ce^{\cos(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

($C = \pm e^{-c_1}$ oder $C = 0$).

2. Variante: Variation der Konstanten
Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung berechnen wir mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen. Es gilt

$$\log|y(x)| = -\int \sin(x)dx = \cos(x) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

und wir finden

$$y_{hom}(x) = Ce^{\cos(x)}, \quad C \in \mathbb{R},$$

($C = \pm e^{C_1}$ oder $C = 0$). Der Ansatz für y_{allg} ist somit:

$$y_{allg}(x) = C(x)e^{\cos(x)}.$$

Einsetzen führt auf

$$\begin{array}{rcl} C'(x)e^{\cos(x)} - C(x)e^{\cos(x)}\sin(x) &\overset{!}{=}& -\sin(x)C(x)e^{\cos(x)} + \sin(x) \\ C'(x) &=& e^{-\cos(x)}\sin(x) \\ C(x) &=& e^{-\cos(x)} + \tilde{C}. \end{array}$$

Damit ist

$$y_{allg}(x) = (e^{-\cos(x)} + \tilde{C})e^{\cos(x)} = 1 + \tilde{C}e^{\cos(x)}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}.$$

(b) Lösung mittels **Separation der Variablen:**

$$y'(x) = x\,y^2(x) + x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y^2+1} = xdx$$

Für die rechte Gleichung berechnen wir auf beiden Seiten das unbestimmte Integral:

$$\begin{array}{rrcl} & \int \frac{dy}{y^2+1} &=& \int xdx \\ \Rightarrow & \arctan(y) &=& \frac{x^2}{2} + c \\ \Rightarrow & y(x) &=& \tan\left(\frac{x^2}{2} + c\right) \end{array}$$

Da der Tangens nur auf Intervallen $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, definiert ist, ergibt sich je nach Wahl von c der Definitionsbereich für x. Beispiel: $c = 0$. Dann ist $x \in [0, \sqrt{\pi})$ oder $x \in (\sqrt{\pi}, \sqrt{3\pi})$, $x \in (\sqrt{3\pi}, \sqrt{5\pi})$, usw.

(c) Lösung mittels **Substitution:**
Setze $u(x) = x + 2y(x)$, d.h. $y(x) = \frac{1}{2}u(x) - \frac{1}{2}x$. Dann ergibt sich

$$y'(x) = \frac{1}{2}u'(x) - \frac{1}{2},$$

und somit wird die ursprüngliche Gleichung zu

$$\frac{1}{2}u'(x) - \frac{1}{2} = \frac{2-\sin(u(x))}{2\sin(u(x))} = \frac{1}{\sin(u(x))} - \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad u'(x) = \frac{2}{\sin u(x)}.$$

Diese Differenzialgleichung ist separierbar

$$\int \sin u \, du = \int 2 \, dx,$$

und wir finden

$$-\cos u = 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Die Auflösung nach u liefert $u(x) = \arccos(-2x - C)$, und wegen $y(x) = \frac{1}{2}\big(u(x) - x\big)$ erhält man schliesslich

$$y(x) = \frac{1}{2}\big(\arccos(-2x - C) - x\big), \quad C \in \mathbb{R}.$$

(d) Lösung mittels **Substitution:**
Nach Substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ erhält man $u'(x) = \frac{y'(x)}{x} - \frac{y(x)}{x^2}$ und die neue Differentialgleichung $u'(x) = \frac{u^2(x)-u(x)}{x}$. Diese lösen wir mittels Separation der Variablen wie folgt:

$$u' = \frac{u^2 - u}{x} \implies \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x} \implies -\log|u| + \log|u-1| = \log|x| + C_1 \implies u(x) = \frac{1}{1 - C_2 x},$$

wobei wir bei der Integration die Zerlegung

$$\frac{1}{u^2 - u} = -\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1}$$

verwendet haben. Es folgt

$$y(x) = xu(x) = \frac{x}{1 - C_2 x}, \quad \text{mit} \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen lassen sich jeweils leicht überprüfen indem man die entsprechenden Ableitungen bildet und in die Differentialgleichung einsetzt. In **b)** ergibt sich zum Beispiel:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x^2}{2} + c\right)} \cdot x = \frac{\sin^2\left(\frac{x^2}{2} + c\right) + \cos^2\left(\frac{x^2}{2} + c\right)}{\cos^2\left(\frac{x^2}{2} + c\right)} \cdot x \\ &= \left(\tan^2\left(\frac{x^2}{2} + c\right) + 1\right) x = \left(y^2(x) + 1\right) x. \quad \checkmark \end{aligned}$$

4. Aufgabe

(a)
- Werden zu Beginn 10 kg des Stoffes S eingebracht, ist die noch unaufgelöste Menge von S gegeben durch 10 und zur Zeit t dann $10 - x(t)$.
- Die momentane Konzentration des schon aufgelösten Stoffes ist $\frac{x(t)}{100}$, Sättigungskonzentration $\frac{1}{4}$ und die Differenz $\frac{1}{4} - \frac{x(t)}{100}$.

Zusammen ist die Geschwindigkeit $x'(t)$ damit

$$x'(t) = k(10 - x(t))\left(\frac{1}{4} - \frac{x(t)}{100}\right).$$

(b) Zu Beginn ist noch keine Menge aufgelöst, die Anfangsbedingung ist damit $x(0) = 0$. Es ist

$$x'(t) = k(10 - x)\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{100}\right) = \frac{k}{100}(10 - x)(25 - x), \quad x(0) = 0.$$

(c) Mit Trennung der Variablen

$$\int \frac{1}{(10 - x)(25 - x)}\, dx = \int \frac{k}{100}\, dt$$

und Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(10 - x)(25 - x)} = \frac{1/15}{10 - x} - \frac{1/15}{25 - x}$$

lautet die obige Integralgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{15}\log\left|\frac{25 - x}{10 - x}\right| &= \frac{kt}{100} + C, \qquad C \in \mathbb{R} \\ \implies x(t) &= \frac{10Ce^{0.15kt} - 25}{Ce^{0.15kt} - 1} \\ \implies x(t) &= \frac{10Ce^{0.15kt} - 10 - 15}{Ce^{0.15kt} - 1} \\ \implies x(t) &= 10\Big(1 + \frac{3}{2 - 2Ce^{0.15kt}}\Big). \end{aligned}$$

Aus $x(0) = 0$ folgt

$$0 = x(0) = 10\Big(1 + \frac{3}{2 - 2C}\Big) \implies C = \frac{5}{2}.$$

Alles zusammen ergibt

$$x(t) = 10\Big(1 + \frac{3}{2 - 5e^{0.15kt}}\Big).$$

Die Konstante k berechnen wir mit der Bedingung $\frac{1}{20} = \frac{x(10)}{100}$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} 5 = 10\Big(1 + \frac{3}{2 - 5e^{1.5k}}\Big) &\implies 2 - 5e^{1.5k} = 10 - 10e^{1.5k} \\ &\implies k = \frac{2}{3}\log\left(\frac{8}{5}\right). \end{aligned}$$

(d) Wir müssen t finden, so dass

$$8 = x(t) = 10\left(1 + \frac{3}{2 - 5e^{0.15\,kt}}\right).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}(2 - 5e^{0.15kt}) = 5 - 5e^{0.15kt} &\implies e^{0.15kt} = \frac{17}{5} \\ &\implies t = \frac{\ln(\frac{17}{5})}{0.15k}. \end{aligned}$$

Mit $k = \frac{2}{3}\log\left(\frac{8}{5}\right)$ ergibt sich $t = \frac{\log(\frac{17}{5})}{0.1\log(\frac{8}{5})} \approx 26.04$.

Nach etwa 26 Minuten sind also 80% des Stoffes S aufgelöst.

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

Man führt den Ausdruck via Trennung der Variablen auf

$$\frac{1}{y(1-\frac{y}{2})}dy = 3\,dx,$$

und Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{y(1-\frac{y}{2})} = \frac{2}{y(2-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{2-y} = \frac{A(2-y)+By}{y(2-y)} = \frac{2A+(B-A)y}{y(2-y)},$$

deshalb muss $A = 1$ und $B = A$ sein. Zusammen liefert das

$$\Big(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y}\Big)dy = 3\,dx,$$

was impliziert

$$\int \Big(\frac{1}{2-y} + \frac{1}{y}\Big)dy = 3x + c,$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$.

2. Ergebnis: (a).

Das charakterische Polynom der Differentialgleichung $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$ ist $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Wegen der doppelten reellen Nullstellen 1 ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Das charakterische Polynom der Differentialgleichung $y''(x) - \omega^2 y(x) = 0$ ist $\lambda^2 - \omega^2$. Hier gibt es zwei reellen Nullstellen $\lambda = \pm\omega$, also ist die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x},$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. Ergebnis: (d).

Da $1 + i$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Differentialgleichung ist, müssen wir dafür die Exponentialfunktionen mit den korrekten Exponenten noch mit x multiplizieren. Wir erhalten also als Ansatz

$$y_{part}(x) = c_1 x e^x \cos(x) + c_2 x e^x \sin(x),$$

für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4. Ergebnis: (b).

Die Differentialgleichung ist linear, da die linke Seite (als Funktion von x) linear von y abhängt. (Der von x abhängige Koeffizient $\sin(x)$ vor y' spielt dabei keine Rolle. Nicht linear ist die Differentialgleichung nur dann, wenn y oder eine der Ableitungen in nicht linearer Form vorkommt, also zum Beispiel ein Term $\exp(y)$ oder $(y')^2$ etc.) Sie ist inhomogen aufgrund der Störfunktion x^2 auf der rechten Seite.