Lösung 22

1. Aufgabe

(a) Diese Funktion ist genau dann definiert, wenn $x^2 - y \geq 0$. Graphisch entspricht dies genau der Fläche unterhalb des Graphen der Funktion x^2. Der Wertebereich besteht aus allen Zahlen ≥ 0 denn $f_1(x, 0) = |x|$.

(b) Hier brauchen wir, dass $xy > 0$, also müssen entweder beide strikt positiv oder beide strikt negativ sein. Der maximale Definitionsbereich setzt sich daher aus dem rechten oberen und dem linken unteren Quadranten zusammen. Der Wertebereich des Logarithmus und damit auch der von f_2 ist ganz $\mathbb{R}$.

(c) Bei dieser Funktion dürfen wir uns nicht dem Trugschluss hingeben, dass $f_3(x, y) = x + y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Die Gleicheit $e^{\log(z)} = z$ ergibt nämlich nur dann Sinn, wenn $\log(z)$ definiert ist, was wiederum nur für $z > 0$ der Fall ist. Wir brauchen daher $x + y > 0$, also die Fläche oberhalb des Graphen der Funktion $-x$. Die Funktion ist immer > 0, da die Exponentialfunktion immer > 0 ist. Da $f_3(x, 0) = x$ für $x > 0$, ist der Wertebereich von f_3 alle Zahlen > 0.

(d) Wir vereinfachen die Funktion zunächst mithilfe der Identität $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$. Insbesondere ist $f_4(x, y) = \frac{\sin(x)\cos(y)}{\cos(y)}$. Ähnlich wie in der vorangegangenen Teilaufgabe dürfen wir nicht einfach $\cos(y)$ im Zähler und Nenner kürzen, da $\frac{z}{z} = 1$ nur für $z \neq 0$ Sinn ergibt. Die Funktion f_4 ist also dann definiert, wenn $\cos(y) \neq 0$, also wenn y nicht von der Form $\frac{1}{2}\pi + n\pi$ ist für ein $n \in \mathbb{Z}$. Für alle y, die nicht von dieser Form sind, gilt aber $f_4(x, y) = \sin(x)$. Insbesondere ist der Wertebereich von f_4 gleich dem des Sinus, das heisst $[-1, 1]$.

2. Aufgabe

(a) Sei c im Wertebereich von f. Dann, $f(x, y) = c$ genau dann, wenn $cx^2 - x + cy^2 = 0$. Dies ist die Gleichung eines Kreises, ausser für $c = 0$; tatsächlich ist für $c \neq 0$ die letzte Gleichung äquivalent zu

$$\left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2|c|}\right)^2,$$

und dies beschreibt einen Kreis mit Zentrum $(\frac{1}{2c}, 0)$ und Radius $1/2|c|$. Die Niveaulinie zu dem Niveau 0 ist die vertikale Gerade $x = 0$ (siehe Abbildung 1).

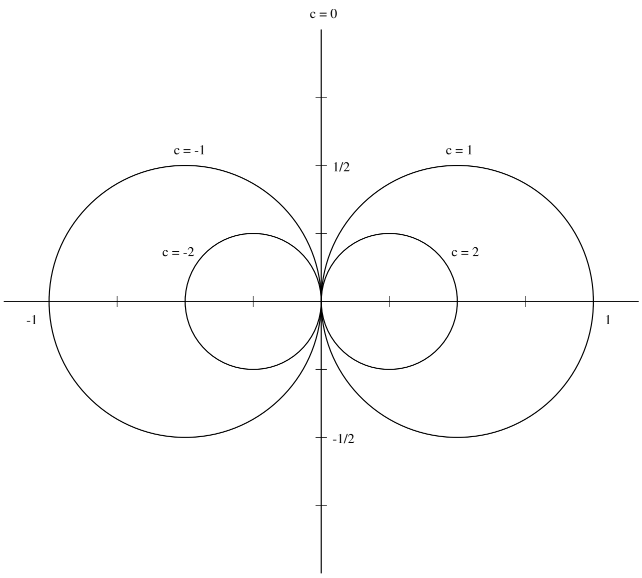

Abbildung 1: Die Niveaulinien $\frac{x}{x^2+y^2} = c$ für $c = -2, -1, 0, 1, 2$.

(b) Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(1, 1, \frac{1}{2})$ ist gegeben durch

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1).$$

Es gilt:

$$f_x(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}, \qquad f_x(1, 1) = 0,$$
$$f_y(x, y) = \frac{-2xy}{(y^2 + x^2)^2}, \qquad f_y(1, 1) = -\frac{1}{2}.$$

Die Tangentialebene ist also gegeben durch

$$z = 1 - \frac{1}{2}y.$$

3. Aufgabe

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$f_x(x, y) = -4xe^{-(2x^2+3y^2)} \qquad \text{und} \qquad f_y(x, y) = -6ye^{-(2x^2+3y^2)}.$$

Somit folgen für die gesuchten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= 4e^{-(2x^2+3y^2)}(4x^2 - 1), \\ f_{yy}(x, y) &= 6e^{-(2x^2+3y^2)}(6y^2 - 1), \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 24\,xye^{-(2x^2+3y^2)}. \end{aligned}$$

4. Aufgabe

(a) Mit $v > 0$ und $c =$ konst. haben wir $v = \sqrt{\frac{2c - 2p - 2\rho gh}{\rho}}$, und also

$$v_p = -\frac{1}{\rho\sqrt{\frac{2c-2p-2\rho gh}{\rho}}} = -\frac{1}{\rho v} \quad \text{und} \quad v_h = -\frac{g}{\sqrt{\frac{2c-2p-2\rho gh}{\rho}}} = -\frac{g}{v}.$$

(b) Es gelten $S_{T_k} = \frac{\alpha}{G^{2/3}}$, $S_{T_a} = -\frac{\alpha}{G^{2/3}}$ und $S_G = -\frac{2\alpha(T_k - T_a)}{3G^{5/3}}$.

(c) Wir schreiben $e^x = \exp(x)$, dann gilt

$$\begin{aligned} V_t &= \frac{\alpha\kappa}{QT}\left(\exp\left(-\frac{\alpha t}{T}\right) - \exp(-\alpha)\right) - \frac{\alpha^2\kappa t}{QT^2}\exp\left(-\frac{\alpha t}{T}\right), \\ V_Q &= -\frac{\alpha\kappa t}{Q^2T}\left(\exp\left(-\frac{\alpha t}{T}\right) - \exp(-\alpha)\right), \qquad \text{und} \\ V_T &= \frac{\alpha^2\kappa t^2}{QT^3}\exp\left(-\frac{\alpha t}{T}\right) - \frac{\alpha\kappa t}{QT^2}\left(\exp\left(-\frac{\alpha t}{T}\right) - \exp(-\alpha)\right). \end{aligned}$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (d).

Sei f eine stetige Funktion und a eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion F mit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier f als die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und $a = 3$.

2. Ergebnis: (c).

Mit Kettenregel $f_y(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} y$ und Produktregel folgt

$$f_{yy}(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y \cdot y + (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-y^2 + (x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Ergebnis: (b).

Falls es eine Funktion f wie oben gibt, gilt $f_{xy} = f_{yx}$. Es sind

$$\begin{aligned} \varphi_x = \varphi_y = \psi_y &= 0, \\ \psi_x = \chi_x &= 2x, \\ \chi_y &= 2y. \end{aligned}$$

Nur bei $f_x = \psi$ und $f_y = \varphi$ ist $f_{xy} = f_{yx}$, denn $f_{xy} = \psi_y = 0 = \varphi_x = f_{yx}$. Eine Lösung ist zum Beispiel $f(x, y) = \dfrac{x^3}{3} + Cy$ mit $C \in \mathbb{R}$. In den drei anderen Fällen gilt $f_{xy} \neq f_{yx}$.

4. Ergebnis: (b).

Mit dem Hinweis haben wir $h(x) = |\cos(x)|$. Alternativ lassen sich die drei anderen Graphen durch Einsetzen einiger Werte ausschliessen.