Lösung 23

1. Aufgabe

Da $f(-x,-y) = f(x,y)$, ist mit jedem kritischen Punkt (x,y) auch $(-x,-y)$ ein kritischer Punkt derselben Art. Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = 2(xe^{x^2+y^2} - 8x, ye^{x^2+y^2} - 4y)$$

mit Nullstellen bei $(x,y) \in \{(0,0),(0,\pm\sqrt{2\log 2}),(\pm\sqrt{3\log 2},0)\}$. Die Funktionswerte dort sind $f(0,0) = 1$, $f(0,\pm\sqrt{2\log 2}) = 4 - 8\log 2$ und $f(\pm\sqrt{3\log 2},0) = 8 - 24\log 2$. Die Hesse-Matrix von f lautet

$$H_f(x,y) = 2e^{x^2+y^2}\begin{pmatrix} 1+2x^2-8e^{-(x^2+y^2)} & 2xy \\ 2xy & 1+2y^2-4e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}.$$

Speziell in den kritischen Punkten ist

$$\begin{aligned} H_f(0,0) &= 2\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \\ H_f(0,\pm\sqrt{2\log 2}) &= 8\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4\log 2 \end{pmatrix}, \\ H_f(\pm\sqrt{3\log 2},0) &= 8\begin{pmatrix} 12\log 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im ersten Fall handelt es sich daher um ein Maximum, im zweiten um einen Sattelpunkt, im dritten um ein Minimum. Man beachte jedoch, dass beide Extrema nur lokal sind, da f weder nach oben noch nach unten beschränkt ist. Es gibt also weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum.

2. Aufgabe

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial F}{\partial s}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big((2xy+y^2)\cdot 1 + (x^2+2xy)\cdot 1\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big(4xy + x^2 + y^2\Big) \\
&= (4y+2x)\cdot 1 + (4x+2y)\cdot 1 \\
&= 6(x+y) = 12s,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schnitt benutzen, dass $x + y = 2s$. Analog folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial s} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big(4xy + x^2 + y^2\Big) \\
&= (4y+2x)\cdot 1 + (4x+2y)\cdot(-1) \\
&= 2(y-x) = -4t,
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial F}{\partial t}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big((2xy+y^2)\cdot 1 + (x^2+2xy)\cdot(-1)\Big) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(-x^2 + y^2) \\
&= (-2x)\cdot 1 + 2y\cdot(-1) \\
&= -2(x+y) = -4s.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

(a) Wegen $x^2+y^2+z-4=0 \iff z=4-x^2-y^2$ definieren wir eine Funktion g mit $g(x,y)=z=4-x^2-y^2$. Die zu untersuchende Fläche betrachten wir als Graph von g über der (x,y)-Ebene: $g(1,2)=-1 \implies (1,2,-1)$ liegt auf der Fläche.

Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z=g(x,y)$ im Punkt $(1,2,-1)$ ist gegeben durch

$$z = g(1,2) + g_x(1,2)(x-1) + g_y(1,2)(y-2).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= -2x, \quad g_x(1,2) = -2 \\ g_y(x,y) &= -2y, \quad g_y(1,2) = -4. \end{aligned}$$

Die Tangentialebene wird also durch

$$z = -1 - 2(x-1) - 4(y-2) = 9 - 2x - 4y$$

gegeben, d.h. die gesuchte Tangentialebene ist

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - 2x - 4y\}.$$

(b) Die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z=f(x,y)$ im Punkt $(1,1,\frac{1}{2})$ ist gegeben durch

$$z = f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}, & f_x(1,1) &= 0, \\ f_y(x,y) &= \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2}, & f_y(1,1) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Tangentialebene ist damit gegeben durch

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - \tfrac{1}{2}y\}.$$

4. Aufgabe

(a) Durch Einsetzen von $y=-x-1$ in die Gleichung $F(x,y)=0$ erhalten wir die Gleichung

$$3x^2 + x = x(3x+1) = 0$$

mit Lösungen $x=0$ und $x=-\frac{1}{3}$. Die Schnittpunkte sind somit $(x_1,y_1)=(0,-1)$ und $(x_2,y_2)=(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3})$.

(b) Aus Aufgabe 3a) wissen wir, dass der Punkt $(0,-1)$ auf der Kurve gegeben durch $F(x,y)=0$ liegt. Wir bestimmen die Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x_0,y_0)=(0,-1)$ mit Impliziter Differentiation:

$$y'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)} = -\frac{2x_0-3y_0}{-2y_0-3x_0} = -\frac{3}{2}.$$

Die Gleichung der Tangente ist also die Gleichung einer Geraden mit Steigung $-\frac{2}{3}$, die durch den Punkt $(0,-1)$ geht, d.h.

$$y(x) = -\frac{3}{2}x - 1.$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (c).

Die Tangentialebene ist parallel zur (x, y)-Ebene, wenn die partiellen Ableitungen im entsprechenden Punkt verschwinden. Mit Kettenregel folgt

$$f_x(x,y) = -\sin\left(\log\left(\frac{xy + \frac{y}{x}}{2}\right)\right)\frac{2}{xy + \frac{y}{x}}\left(\frac{y}{2} - \frac{y}{2x^2}\right),$$
$$f_y(x,y) = -\sin\left(\log\left(\frac{xy + \frac{y}{x}}{2}\right)\right)\frac{2}{xy + \frac{y}{x}}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right).$$

Diese verschwinden, falls

$$0 = -\sin\left(\log\left(\frac{xy + \frac{y}{x}}{2}\right)\right)\frac{1}{xy + \frac{y}{x}}\left(y - \frac{y}{x^2}\right),$$
$$0 = -\sin\left(\log\left(\frac{xy + \frac{y}{x}}{2}\right)\right)\frac{1}{xy + \frac{y}{x}}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Diese Gleichungen sind nach Einsetzen von (x_0, y_0) nur für (c) erfüllt.

2. Ergebnis: (b).

Die kritischen Punkte sind die Nullstellen der ersten partiellen Ableitungen. Wir müssen also die Gleichungen $9(x^2 - 1) = 0$ und $4 - y^2 = 0$ lösen. Somit sind die kritischen Punkte $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(-1, 2)$ und $(-1, -2)$. Um diese zu charakterisieren, brauchen wir

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = -36xy.$$

Dann sind

$$D(1, 2) = -72 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Sattelpunkt}$$
$$D(1, -2) = 72 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(1, -2) = 18 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Minimum}$$
$$D(-1, 2) = 72 > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(-1, 2) = -18 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{lokales Maximum}$$
$$D(-1, -2) = -72 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Sattelpunkt.}$$

3. Ergebnis: (a).

Globales Extremum heisst $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ oder $\geq f(x_0, y_0)$ für alle (x, y) in der ganzen (x, y)-Ebene $\mathbb{R}^2$. Bei einem lokalen Extremum müssen die Ungleichungen oben nur für alle (x, y) in einer Umbgebung von (x_0, y_0) erfüllt sein.

An einem lokalen Extremum gilt es immer, dass die beiden partiellen Ableitungen f_x und f_y verschwinden. Es kann aber sein, dass wir kein lokales Extremum haben, wenn f_x und f_y verschwinden. Sei zum Beispiel $f(x, y) = xy$. Dann gilt $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ aber $(0, 0)$ ist ein Sattelpunkt.

4. Ergebnis: (c).

Wir setzen zuerst $\frac{x^2+y^2}{y-4} = -2$. Da $y \neq 4$ können wir folgendes schreiben:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= -2(y-4) \\ \implies x^2 + y^2 + 2y &= 8 \\ \implies x^2 + (y+1)^2 - 1 &= 8 \\ \implies x^2 + (y+1)^2 &= 9. \end{aligned}$$

Dies ist ein Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt $(0, -1)$.