Lösung 24

1. Aufgabe

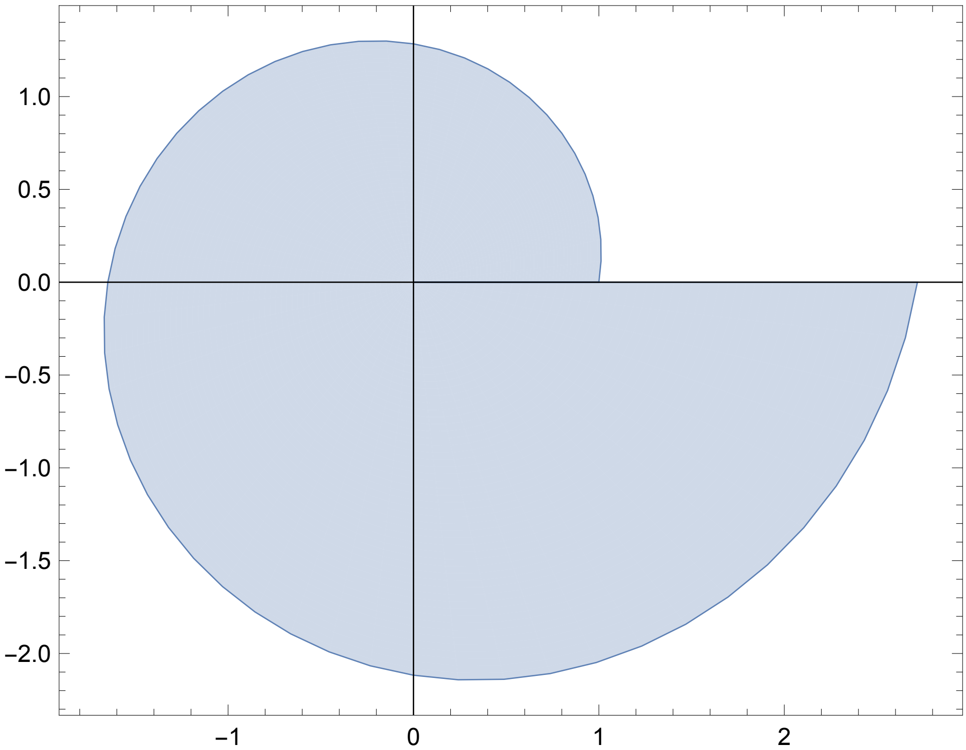
Die xz-Ebene ist gegeben durch die Gleichung $y = 0$. Die Schnittkurve mit der xz-Ebene ist demnach

$$z = e^{-2x^2},$$

da $f(x, 0) = e^{-2x^2}$.

2. Aufgabe

Das Gebiet B sieht wie folgt aus



Die Fläche des Gebietes B ist mit der Formel für Gebiete in Polarkoordinaten gleich

$$\begin{aligned}
\iint_B 1\, dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\phi)} 1 \cdot r\, dr d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{e^{\phi/2\pi}} r\, dr d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{e^{\phi/2\pi}} d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{\phi/\pi}\, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \pi e^{\phi/\pi} \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}(e^2 - 1).
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

(a) Für das Integral über D (siehe Abbildung 1) erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \cos x \cos y \, dy dx &= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cos y \, dy dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy \, dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \sin y \Big|_0^{\pi/2} dx \\ &= \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \, dx \\ &= \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = -1.\end{aligned}$$

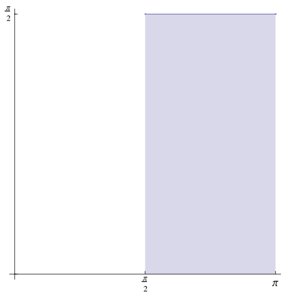


Abbildung 1: Gebiet D

(b) Für das Integral über E (siehe Abbildung 2) erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint_E xy + y \, dy dx &= \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} xy + y \, dy dx \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2} y^2 x + \frac{1}{2} y^2 \Big|_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2 dx \\ &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{32}x^4 - \frac{1}{24}x^3 \Big|_0^4 = 4.\end{aligned}$$

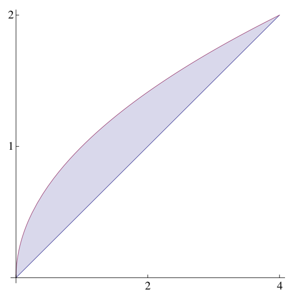


Abbildung 2: Gebiet E

(c) Der Flächeninhalt von F (siehe Abbildung 3) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\int\int_F 1\,dydx &= \int_0^{e^2-1}\int_{\log(1+x)}^2 1\,dydx\\ &= \int_0^{e^2-1} 2-\log(1+x)dx\\ &= 2x-(1+x)\log(1+x)+x\Big|_0^{e^2-1} = e^2-3.\end{aligned}$$

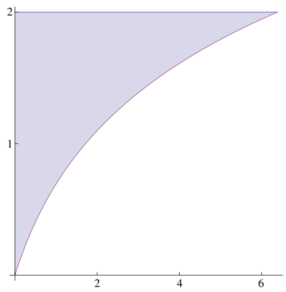


Abbildung 3: Gebiet F

4. Aufgabe

Das Gebiet wird durch die Geraden $y=\frac{1}{2}x$ und $y=-\frac{1}{2}x$ begrenzt. Somit ist G geben durch

$$G=\left\{(x,y)\mid 0\le x\le 2\,,-\frac{1}{2}x\le y\le\frac{1}{2}x\right\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\iint_G f(x,y)\,dA &= \int_0^2\int_{-x/2}^{x/2}(xy+x+y)\,dydx\\ &= \int_0^2\left(\frac{xy^2}{2}\Big|_{-x/2}^{x/2}+xy\Big|_{-x/2}^{x/2}+\frac{1}{2}y^2\Big|_{-x/2}^{x/2}\right)dx\\ &= \int_0^2 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2\\ &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Multiple Choice

1. Ergebnis: (d).

Da $xy = 36$, gilt $y = \frac{36}{x}$ (alternativ kann man diese Gleichung mithilfe der Lagrange-Multiplikator erhalten). Dann kann man eine neue Funktion definieren

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = x + \frac{36}{x} - 1.$$

Es gilt

$$g'(x) = 1 - \frac{36}{x^2}.$$

Das heisst, dass 6 und -6 lokale Extremwerte der Funktion g sind. Die Punkte $(6, 6)$ und $(-6, -6)$ sind dann lokale Extremwerte der Funktion f. Es ist aber klar, dass die Funktion f unbegrenzt ist (x kann beliebig gross sein), was impliziert, dass es kein globales Maximum gibt. Der Punkt $(6, 6)$ ist eigentlich ein lokales Minimum von f und der Punkt $(-6, -6)$ ist ein lokales Maximum von f.

2. Ergebnis: (a).

Mit Polarkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy &= \int_V r \cdot r\, drd\varphi \\
&= \int_V r^2\, drd\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 drd\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} d\varphi = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

3. Ergebnis: (c).

Es ist $\partial_x f(x, y) = \phi'(xy) \cdot \partial_x(xy) = y\phi'(xy)$.

4. Ergebnis: (c).

Es gilt
$$\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+6y \\ 6x+\frac{1}{2}y^2+\frac{27}{2}\end{pmatrix}.$$
Die notwendigen Bedingungen für kritische Punkte sind
$$\begin{aligned} 0 &= 6x+6y \\ 0 &= 6x+\frac{1}{2}y^2+\frac{27}{2}. \end{aligned}$$
Aus der ersten Gleichung folgt, dass $x=-y$. Einsetzen in die zweite Gleichung führt auf die quadratische Gleichung
$$\frac{1}{2}y^2-6y+\frac{27}{2}=0$$
mit den Lösungen $y_1=9$ und $y_2=3$. Die kritischen Punkte sind also
$$(x_1,y_1)=(-9,9) \quad \text{und} \quad (x_2,y_2)=(-3,3).$$
Wenden wir nun das hinreichende Kriterium an. Es ist
$$D(x,y)=\partial_{xx}f(x,y)\cdot\partial_{yy}f(x,y)-\partial_{xy}f(x,y)^2=6y-36.$$
Also gilt
$$D(-9,9)=54-36=18>0 \quad \text{und} \quad D(-3,3)=18-36<0$$
und daher ist $(-3,3)$ ein Sattelpunkt und wegen $\partial_{xx}f=6>0$ ist der zweite kritische Punkt $(-9,9)$ ein lokales Minimum.